

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

49. Band, Heft 1/3

1. September 1954

S. 1—144

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

• **Broman, Arne:** Berühmte mathematische Probleme. (Verdandis småskrifter Nr. 521.) Stockholm: Bonniers 1952. 64 S. 4,50 Kronen [Schwedisch].

Inhalt: Anzahl der Primzahlen; regelmäßiges Siebzehneck; Parallelenaxiom; Primzahlzwillinge und Goldbachsche Vermutung; großer Fermatscher Satz; Winkeldreiteilung und Würfelverdopplung; Quadratur des Kreises; Gleichungen 5. Grades; Vierfarbenproblem; Primzahlsatz; Kontinuumsproblem. Für die Auswahl der Probleme war die Formulierbarkeit für einen Leserkreis mit geringen mathematischen Kenntnissen ausschlaggebend. Die Darstellung ist pädagogisch sehr ansprechend. H. L. Schmid.

• **Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Cambridge, Mass., August 30—September 6, 1950. — Vol. I, II.** Providence, R. I.: American Mathematical Society 1952. 769 p., 461 p.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

• **Comptes rendus du premier Congrès des Mathématiciens hongrois. (27 août — 2 Septembre 1950.)** (Publié avec le soutien de l'Académie des Sciences de Hongrie par la Société mathématique János Bolyai.) Budapest: Les Éditeurs de l'Académie 1952. 789 S.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt. Der Band wird unter der Abkürzung C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950 geführt.

• **Symposium über einige mathematische Probleme, die in Südamerika bearbeitet werden (vom 19. bis 21. Dezember 1951).** Montevideo, Uruguay: Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina, 1952. 183 p. [Spanisch].

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt (vgl. z. B. 47, 259, 349, 354; 48, 61, 92, 93, 168, 206, 216, 321, 348; 49, 79).

• **Bohr, Harald:** Collected mathematical works. In three volumes. I. Dirichlet series, the Riemann zeta-function. II. Almost periodic functions. III. Almost periodic functions. Linear congruences. Diophantine approximations. Function theory. Addition of convex curves. Other papers. Encyclopaedia article. Supplements. Edited by Erling Følner and Børge Jessen. København: Dansk Matematisk Forening 1952. XXXIV, 916; IX, 970; X, 992 p.; total price 110 Danish crowns.

Die gesammelten mathematischen Abhandlungen von H. Bohr wurden in drei stattlichen Bänden von der dänischen Mathematikervereinigung mit Unterstützung der Rask-Ørstedt-Stiftung und der Carlsberg-Stiftung herausgegeben. Die wissenschaftliche Bearbeitung erfolgte durch E. Følner und B. Jessen. Es wurden alle mathematischen Abhandlungen von H. Bohr wiedergegeben mit Ausnahme von elementaren Arbeiten und von dänisch geschriebenen Lehrbüchern. — Band I beginnt mit einer englischen Übersetzung der Ehrenvorlesung von H. Bohr anlässlich seines 60. Geburtstages (vgl. dies. Zbl. 31, 99), er enthält alle Arbeiten über Dirichletsche Reihen und über die Riemannsche Zetafunktion. Insbesondere ist die 1910 in dänischer Sprache erschienene Doktordissertation „Beitrag zur Theorie der Dirichletschen Reihen“ abgedruckt. Eine englische Übersetzung der Dissertation steht außerdem unter den Supplementen des Bandes III. — Band II enthält nur Arbeiten über fastperiodische Funktionen, von denen ein Teil auch noch im III. Bande steht. Es folgen Arbeiten über lineare Kongruenzen und diophantische Approximationen, Funktionentheorie, Konvexe Kurven und einige Arbeiten aus verschiedenen Gebieten. Der III. Band enthält insbesondere auch den 1923 erschienenen Enzyklopädieartikel von Bohr und Cramer, „Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie“. In den Supplementen befinden sich englische Zusammenfassungen der abgedruckten dänischen Arbeiten. Der III. Band schließt mit einer englischen Übersetzung des Nachrufes, den B. Jessen am 6. 4. 1951 an der Kopenhagener Universität gehalten hat, mit einem chronologisch geordneten Literaturverzeichnis und mit kurzen Bemerkungen zu den abgedruckten Arbeiten. Die Ausstattung der Bände ist vorzüglich. H. L. Schmid.

Geschichte.

● **Neugebauer, O.:** *The exact sciences in antiquity.* Princeton, N. J.: Princeton University Press 1952, X, 191 p. \$ 5,00.

Hervorgegangen aus einem Zyklus allgemeinverständlicher Vorlesungen, vereinigt das glänzend geschriebene Buch die Eignung für eine erste Einführung in das behandelte Gebiet mit der Brauchbarkeit als Nachschlagewerk über die wichtigsten Forschungsergebnisse. Verf. versteht es, im Leser das Gefühl zu erwecken, er nehme unmittelbar an der Entzifferung eines mathematischen Keilschrifttextes oder eines astronomischen Papyrus teil. Freilich, eine „Geschichte der exakten Wissenschaften im Altertum“ wird man vergeblich suchen. Verf. beschränkt sich im wesentlichen auf die Gebiete, in denen er selbst gearbeitet hat und als erster Fachmann allgemein anerkannt ist, also die ägyptische und babylonische Mathematik und Astronomie und ihre Nachwirkungen im Hellenismus (einschl. Indien). Das Hauptgewicht liegt hierbei auf der mathematischen Astronomie, die der Verf. als den wichtigsten Faktor in der Entwicklung der Naturwissenschaft bis in die Tage von Laplace, Lagrange und Gauß ansieht. Besonders dankbar muß man dem Verf. dafür sein, daß er immer wieder auf die großen Zusammenhänge eingeht und Querverbindungen zu ziehen sucht, auch wenn man ihm in Einzelheiten nicht immer zustimmen kann. Mit gegnerischen Meinungen setzt er sich häufig temperamentvoll auseinander. Auch die interessanten Mitteilungen über den Verlauf einzelner Entdeckungen, die er öfters einfließt, sind teilweise recht subjektiv gefärbt; aber das macht auch wieder einen Reiz des Buches aus. — Viele der aufgeworfenen Fragen werden zweifellos ihrer Lösung näherkommen, wenn einmal die ungeheuren Massen arabischer astronomischer und astrologischer Manuskripte, die noch in den Bibliotheken schlummern, durchgearbeitet sind; hier bietet sich der Forschung noch ein weites Feld, das freilich viel Scharfsinn und Zeitaufwand erfordert. — Sorgfältig ausgewählte und hervorragend reproduzierte Tafeln erhöhen den Genuß der Lektüre; ein gutes Register erleichtert dem Benutzer das Wiederfinden der zahlreichen erwähnten Einzelergebnisse.

H. I. Hermelink.

● **Apostle, H. G.:** *Aristotle's philosophy of mathematics.* Chicago: University of Chicago Press 1952. X, 228 p. \$ 6,00.

Einen ersten Überblick über das vorliegende Werk vermittelt das Inhaltsverzeichnis: I. Universal Mathematics. II. Arithmetic. III. Geometry. IV. Composite Sciences. V. Criticism of Various Views on Mathematics. Unter diesen Rubriken, die weitergehend unterteilt sind, wird alles, was sich bei Aristoteles auf Mathematik bezieht, sorgfältig unter genauer Stellenangabe auseinandergesetzt. Ein Verzeichnis gibt die Übersetzung der griechischen Fachwörter, und ein Index über Personen- und Begriffsnamen erleichtert das Auffinden gewünschter Stellen. Das Buch bezeugt das wachsende Interesse, das die heutige Generation dem umfassenden Wissen der Griechen um die Grundlagen der Mathematik entgegenbringt, und ist allen zu empfehlen, die sich in die Gedankengänge des Stagiriten einarbeiten wollen. Verf. sagt im Vorwort „No attempt has been made to go beyond what is found in Aristotele's work and what is implied by them“. Es sei dem Ref. erlaubt, hierzu zu bemerken, daß bereits eine jede Gliederung des Stoffes eine erste Interpretation in sich schließt. Wohl jeder Anfänger wird sodann das Bedürfnis nach weiterer Interpretation haben, und es ist daher zu bedauern, daß keine weitere Literatur angegeben ist.

J. J. Burckhardt.

● **Stamatis, E.:** *Euklids Geometrie. Elemente Buch 1, 2, 3, 4. Band I.* Athen: Nik. A. Sakkula, 1952. 179 S. [Altgriechisch-neugriechisch].

● **Stamatis, Evangelos S.:** *Euklids Geometrie und Zahlentheorie. Elemente Buch 5, 6, 7, 8, 9. Band II.* Athen: Schulbuchverlag 1953. 369 S. [Altgriechisch-neugriechisch].

Es handelt sich um eine vorzügliche altgriechisch-neugriechische Ausgabe, gestützt auf die auch heute noch maßgebliche Heiberg-Edition (Leipzig 1883/86) und unter Mitberücksichtigung der besten neusprachigen Ausgaben und kritischen Darstellungen. Die Einleitung zu Buch I/IV enthält zusammenfassende Bemerkungen über die Vor- und Entstehungsgeschichte der Elemente, über ihren methodischen Aufbau und über die moderne Grundlagenforschung, die Einleitung zu Buch V/IX eine feinsinnige Studie über die Seiten- und Diagonalzahlen des Theon von Smyrna, die mit dem auf Archytas zurückgeführten Verfahren des arithmetisch-geometri-

schen Mittels zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ in Verbindung gebracht wird. In einem Nachwort folgen eingehende Analysen zu Buch V/IX vom modernen Standpunkt aus.

J. E. Hofmann.

● **Millás Vallierosa, José Maria:** Die enzyklopädische Schrift *Yēsodé ha-těbuná u-migdal ha-ěmuná* von R. Abraham bar Hiyya ha-Bargeloni. Kritische Ausgabe mit Übersetzung, Vorwort und Anmerkungen. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto Arias Montano 1952. 96 + 52 S. in Hebräisch. [Spanisch].

Der Mathematiker und Astronom Rabbi Abraham bar Hiyya, genannt Savasorda (1. Hälfte 12. Jahrh.) war bemüht, seinen nicht des Arabischen mächtigen Glaubensgenossen in Nordfrankreich und Deutschland die höhere Bildung der Zeit zu vermitteln. Von seiner großangelegten, vielleicht nie vollendeten Enzyklopädie „Das Fundament des Wissens und der Turm des Glaubens“ sind nur noch die Einleitung und die Traktate über Arithmetik und Geometrie (mit Optik) erhalten. Bemerkenswert erscheint vor allem die knappe und klare Darstellung des Rechnens mit indischen Ziffern und Brüchen und des kaufmännischen Rechnens. — Der Verf., der uns schon in zahlreichen Veröffentlichungen mit Zeugnissen der naturwissenschaftlichen Betätigung im mittelalterlichen Spanien bekanntgemacht hat, hat die mustergültige Ausgabe mit einem kenntnisreichen Vorwort versehen (mit der Übersetzung der Einleitung auch abgedruckt in the Hebrew Union College Annual 23, Nr. 1, 645—668 (1950/51)). Die flüssige Übersetzung läßt die Textschwierigkeiten kaum ahnen. Leider findet man sich etwas schwer zurecht, weil Hinweise auf die Seitenzahlen des Textes fehlen.

H. I. Hermelink.

Boas, Marie: The establishment of the mechanical philosophy. *Osiris* 10, 412—541 (1952).

Die Verf. gibt eine ausführliche, durch zahlreiche Belege gestützte Darstellung der Entwicklung der Theorie der Materie von der Renaissance bis zum achtzehnten Jahrhundert unter besonderer Betonung des Beitrages von Robert Boyle. Sie zeigt, wie mit der Renaissance eine anti-aristotelische Einstellung aufkam, die an die Stelle der aristotelischen vier Elemente im Anschluß an Epikur, Demokrit und Anaxagoras eine Atomtheorie zu setzen versuchte. Vor allem Gassendi hat sich um eine Wiederbelebung der epikuräischen Atomlehre bemüht. Seine Atome hatten zwar Bewegung, diese diente jedoch nicht dazu, durch ihre Veränderlichkeit irgendwelche Eigenschaften der Körper zu erklären; die ersten Schritte in dieser Richtung taten Galilei, Beeckman und Francis Bacon. Diese versuchten, die Welt auf Materie und Bewegung zurückzuführen, z. B. ist für Beeckman und Bacon Wärme und Kälte mehr oder weniger Bewegung. Die Verdrängung der okkulten Kräfte und der inhärenten Formen und Qualitäten, die von der scholastischen Physik für die Erklärung der Körpereigenschaften eingeführt waren, war die schwierige Aufgabe der neuen Atomistik. Vor allem Boyle, der erste „physikalische Chemiker“, hat nach Descartes diese Aufgabe systematisch in Angriff genommen und seine Theorien durch zahlreiche Experimente gestützt. Newton hat die Boyleschen Überlegungen erweitert durch die Hinzunahme von (unerklärbaren und damit allerdings wieder okkulten) Anziehungs- und Abstoßungskräften, so daß am Ende des siebzehnten Jahrhunderts das Weltbild in dem Versuch bestand, alle Eigenschaften der Körper auf die Bewegung sehr kleiner Teilchen zurückzuführen, wobei es je nach Einstellung offen blieb, ob diese unteilbar waren oder nicht. Im achtzehnten Jahrhundert ging der allgemeine Zug dahin, die Theorie zu vereinfachen, bis schließlich die Entwicklung in Dalton gipfelte, der den einzelnen Atomen charakteristische Gewichte zuschrieb. Der Arbeit, die ein Teil der Dissertation der Verf. ist, ist ein umfangreiches Literaturverzeichnis von etwa 250 Schriften beigefügt, das unterteilt ist: Geschichte des Atomismus, wissenschaftliche Schriften

des 17. und 18. Jahrhunderts, Werke über die Wissenschaftsgeschichte der beiden Jahrhunderte, Quellen für den Atomismus im Altertum. Bei seiner Durchsicht fällt das fast vollständige Fehlen deutscher Autoren auf. *A. Kratzer.*

Rome, A.: The calculation of an eclipse of the sun according to Theon of Alexandria. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950), 1, 209—219 (1952).

Verf. teilt einige der Ergebnisse und Probleme mit, die sich ihm bei der Arbeit an der Herausgabe des sechsten Buches von Theons Kommentar zum Almagest ergeben haben. Aus der Fülle der interessanten Einzelheiten sei folgendes herausgegriffen: Die Handschriften beweisen im Gegensatz zur bisher herrschenden Meinung, daß Theon innerhalb der von ihm (durch Angabe der Stundenbruchteile in Stammbrüchen) angedeuteten Fehlergrenzen von ca. 10 Minuten die Sonnenfinsternis vom 16. Juni 364 genau beobachtet und berechnet hat. Verf. stellt die Vermutung auf, daß die Beobachtung der Sonnenfinsternisse im Altertum schon mittels gefärbter Gläser geschah. — Da sich in Theons „kleinem Kommentar zu den Handtafeln“ Gebrauch und Name der Epakten zur Bestimmung der Syzygien finden, liegt die Vermutung nahe, daß das alexandrinische System der Osterberechnung sich aus der Ptolemäischen Schule entwickelt hat. — Die 25jährigen Perioden der Syzygientafel des Almagest sowie in den „Handtafeln“ könnten auf eine allmähliche Loslösung des Ptolemäus vom Hipparchischen Vorbild (18jährige Perioden) hinweisen. — Verf. weist dann auf einige Verfahren und Kunstgriffe bei der Tafelberechnung des Ptolemäus hin und stellt schließlich eine neue, sehr einleuchtende Hypothese über den Zweck der sog. Prosneusis auf: sie sollte bei Finsternissen zur genauen Einstellung des Astrolabs auf den zu erwartenden Ort der ersten und letzten Berührung dienen.

H. I. Hermelink.

Fleckenstein, J. O.: Ein Basler Problem der sphärischen Astronomie aus dem Nachlaß von Johann I und Niklaus I Bernoulli. Verhdl. Naturforsch. Ges. Basel 63, 273—295 (1952).

Es handelt sich um die in der Universitätsbibliothek Basel verwahrten und seinerzeit nicht zum Druck gekommenen Entwürfe von Joh. (Msc. L Ia 13, Nr. 15) und Niklaus Bernoulli (Msc. L Ia 24, p. 87 ff.) von 1729 zur Beantwortung der kurz zuvor von der Académie des sciences gestellten Preisfrage nach der besten Höhenbestimmung auf See durch Sonnen- und Sternbeobachtung. Gefordert wird die Bestimmung der Polhöhe aus 3 beobachteten Höhen und den zugehörigen Zwischenzeiten eines unbekannten Sterns. Verf. ediert die Texte unter Beigabe gründlicher literarischer und sachlicher Erläuterungen.

J. E. Hofmann.

● **Beck, L. J.: The method of Descartes. (A study of the Regulæ.)** Oxford: At the Clarendon Press 1952. X, 316 p. 30s.

Gestützt auf die Ausgabe von Adam-Tannery (Adam et Tannery, Oeuvres de Descartes, Correspondance I, Paris 1897; Adam, Vie et oeuvres de Descartes, Paris 1910), belegt Verf. in dieser gründlichen und tiefgreifenden Studie aufs Genaueste, wie die „regulæ ad directionem ingenii“ als das methodische Kernstück das ganze philosophische, mathematische und naturwissenschaftliche Lebenswerk von Descartes bestimmen.

J. E. Hofmann.

Osipovskij, Timofej Fedorovič: Über Raum und Zeit. Rede, gehalten in der feierlichen Versammlung der Charkover Universität am 30. August 1807. Istoriko-mat. Issledovanija 5, 9—17 (1952) [Russisch].

Osipovskij, Timofej Fedorovič: Über das dynamische System Kants. Überlegungen, vorgetragen in der feierlichen Versammlung der Charkover Universität am 30. August 1813. Istoriko-mat. Issledovanija 5, 18—27 (1952) [Russisch].

Bachmutskaja, È. Ja.: Timofej Fedorovič Osipovskij und sein „Lehrbuch der Mathematik“. Istoriko-mat. Issledovanija 5, 28—74 (1952) [Russisch].

Prudnikov, V. E.: Ergänzende Mitteilungen über T. S. Osipovskij. Istoriko-mat. Issledovanija 5, 75—83 (1952) [Russisch].

Cassina, Ugo: Alcune lettere e documenti inediti sul trattato di calcolo di Genocchi-Peano. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 337—362 (1952).

Peano (1858/1932) hatte als Assistent von Genocchi (1817/89) während dessen schwerer Erkrankung 1882/84 die infinitesimalen Einführungsvorlesungen und die

Redaktion des „Calcolo differenziale . . .“ (Torino 1884, dtsh. 1889/90) übernommen und mit Zusätzen versehen. In öffentlichen Erklärungen von 1884 lehnte G. die Mitautorschaft ab; P. behauptete jedoch sowohl in den „Applicazioni geometriche . . .“ (Torino 1887) wie im Nachruf auf G. (Torino 1890), dieser habe sich mit der Nennung als Verf. auf dem Titelblatt einverstanden erklärt. Bisher unveröffentlichte Briefe aus G.s Nachlaß bestätigen P.s Behauptung, lassen die Reaktion der Freunde G.s auf dessen Erklärung und die sich steigernde Gereiztheit G.s erkennen. Aus einer Übersicht über die Original-Aufzeichnungen G.s von 1865/67 mit Randnoten von 1881 und 1885, deren wichtigste ausführlich abgedruckt sind, gewinnen wir Klarheit über die entscheidenden Zusätze P.s, die von grundsätzlicher Bedeutung geworden sind.

J. E. Hofmann.

Sostak, R. Ja.: Aleksej Vasil'evič Letnikov. Istoriko-mat. Issledovanija 5, 167—238 (1952) [Russisch].

Depman, I. Ja.: Karl Michajlovič Peterson und seine Kandidaten-Dissertation. Istoriko-mat. Issledovanija 5, 134—164 (1952) [Russisch].

Masotti, Arnoldo: Sull'opera scientifica di Matteo Ricci. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 415—445 (1952).

Übersicht über Leben und Werk von M. Ricci (1552—1610), dem Apostel Chinas, mit reichen Literaturangaben. Er machte die Chinesen mit der europäischen Astronomie und Mathematik seiner Zeit, insbesondere mit den Werken seines Lehrers Clavius bekannt; seine — mit Hilfe gelehrter einheimischer Christen durchgeführte — Euklidübersetzung übte einen großen Einfluß aus.

H. I. Hermelink.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Fitch, Frederic Brenton:** Symbolic logic. — An introduction. New York: The Ronald Press Co. 1952. X, 238 p. \$ 4,50.

Dieses System hat die folgenden wesentlichen Eigenschaften: (1) Es ist typenfrei. (2) Es reicht trotzdem aus für die Begründung einer Analysis, welche die für die Physik erforderliche Mathematik enthält (Beweis in einem angekündigten zweiten Bande). (3) Die Widerspruchsfreiheit des Systems ist beweisbar. Verf. erinnert daran, daß ein solcher Beweis bis jetzt für keines der wegen (1) und (2) zur Konkurrenz zuzulassenden Systeme der mengentheoretischen Logik gelungen ist. (4) Das System enthält eine (hier zum erstenmal auf die in (5) angegebene Beweismethode gestützte) Modalitätenlogik, die im wesentlichen identisch ist mit dem Lewis-System S4, das der Iterierung bzw. dem Abbau von iterierten modalen Operatoren besonders entgegenkommt. [Mit „ \Box “ für „es ist notwendig, daß“, „ \Diamond “ für „es ist möglich, daß“ ist zwar beweisbar $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$, dagegen nur $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Diamond p \wedge \Diamond q$, im Einklang mit den Intuitionen, die dem natürlichen Gebrauch der beiden Operatoren zugrunde liegen.] (5) Eine den Kalkülen des natürlichen Schließens von Jaśkowski und Gentzen nachgebildete Methode der inneren oder untergeordneten Beweise („subordinate proofs“), die für die Hauptbeweise als einzige Deduktionsmittel zugelassen sind. Die Eliminierungsregel für die Implikation ist der Modus ponens. Die Einführungsregel entspricht dem Deduktionstheorem. Dies ist deshalb und nur deshalb möglich, weil in dem System keine Variablen vorkommen oder, was auf dasselbe hinauskommt, keine Einsetzungsregeln. An die Stelle der Einsetzungen treten Ersetzungen.

Die Methode der untergeordneten Beweise wird zunächst eingeübt an den aussageerzeugenden Funktoren $\wedge, \vee, \leftrightarrow$, (mit den üblichen Resultaten) und \sim . Hier wesentliche Einschränkungen, zur Abwehr der sonst erzeugbaren Antinomien. Drei Grundregeln: (1) $p, \sim p \vdash q$, (2) $p \vdash \sim \sim p$, (3) $\sim \sim p \vdash p$, mit $H \vdash \theta$ für „ θ ist ableitbar aus H “. Das ausgeschlossene Dritte $p \vee \sim p$ ist nur als Hypothese zugelassen. (Ausnahme: $a = b \vee \sim a = b$, je nachdem, ob a und b gleichgestaltet sind oder nicht.) $p \rightarrow q, p \rightarrow \sim q \vdash \sim p$ ist abgeschwächt zu $p \vee \sim p, p \rightarrow q, p \rightarrow \sim q \vdash \sim p$. („Principle of restricted reductio ad absurdum“.) Der nicht-evidente, also nur pragmatisch interpretierbare Charakter dieser Abschwächung scheint mir evident zu sein. Es gelten die de Morganschen Äquivalenzen, dagegen offenbar nicht $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$ (hierzu ist überhaupt nichts gesagt). An Stelle von $p \rightarrow q \vdash \sim q \rightarrow \sim p$ ist nur $p \vee \sim p, p \rightarrow q \vdash \sim q \rightarrow \sim p$ beweisbar. Man erkennt, daß diese Theorie der Negation nicht nur von der klassischen, sondern auch von der intuitionistischen Theorie wesentlich verschieden ist. Eine besonders für den Anfänger lehrreiche Vergleichung mit der Theorie von Heyting ist angeschlossen. Verf. bemerkt selbst, daß der Verzicht auf $p \vee \sim p$ gleichbedeutend ist mit der Zulassung von indefiniten Aussagen. Was das für Dinge sind, wird nicht gesagt. Und überhaupt

ist auf jede Semantik verzichtet. Vermutlich nicht nur aus dem p. VI angegebenen Grunde: wegen der unnötigen Schwierigkeiten, in die sie den Anfänger verwickeln soll, und der ihm hieraus für die Entwicklung seiner technical ability entspringenden Nachteile, sondern weil eine einigermaßen vernünftige Semantik für diesen Kalkül auf unüberwindliche Hindernisse stößt, denn in diesem Kalkül kann, wie schon W. Ackermann [J. symbolic Logic 17, 266–268 (1952)] bemerkt hat, nicht einmal generell von $\vdash p$ und $\vdash q$ auf $\vdash p \wedge q$ geschlossen werden (vgl. p. 126).

Zur Abwehr der Russell'schen Antinomie genügt der Verzicht auf $\vdash p \vee \sim p$. Nach Einführung der Elemente der Identitätstheorie, der Theorie der geordneten Paare, des Klassen- und des zweistelligen Relationenkalküls (mit einer Begründung des Klassenkalküls über einem Äquivalent der Church'schen Regeln der λ -Konversion) ist zur Abwehr von Antinomien noch ein weiteres Einschränkungsprinzip erforderlich (18. 6. „Special Restriction“), dessen Formulierung jedoch so knifflig (Verf.: complicated) ist, daß ein Ersatz dieses Prinzips durch ein wesentlich einfacheres (warum nicht *nur* dieses?) sehr entlastend wirkt (19. 1. „Simple Restriction“). Dieses Prinzip besagt, daß kein Beweisglied in seiner Begründung eine Eliminationsregel enthalten darf, wenn ein vorangehendes Beweisglied die entsprechende Einführungsregel in seiner Begründung enthält. Mit dieser Abwehr gelingt die Ausschaltung der Curry'schen Antinomie (18. 4.). Hierunter ist zu verstehen eine von Curry angegebene Methode, die es ermöglicht, in einem ungenügend geschützten System jede Aussage abzuleiten.

Für das so weit entwickelte System wird in 4. 20 die Widerspruchsfreiheit bewiesen. (Jeder Beweis kann umgeformt werden in einen normalen, bei dem jede Formel des Hauptbeweises durch die Einführungsregel zustande kommt.) Es folgt die Quantifikatorentheorie der ersten Stufe, die Identitäts- und die Quantifikatorentheorie für die modalisierte Logik, die Elemente der Theorie der klassen- und relationenlogischen Operatoren, abschließend ein Beweis für die Widerspruchsfreiheit des erweiterten Systems. Zu diesem Beweis bemerkt W. Ackermann (a. a. O.), daß er in wenigstens einem wesentlichen Falle von einem Beweismittel von unzulässiger Stärke Gebrauch macht.

Die Darstellung ist so durchgearbeitet, daß man sich mühelos zurecht findet, die Formalisierung der Beweise ist vorbildlich durchdacht, ihre drucktechnische Darbietung mustermäßig. In diesen Vorzügen scheint mit der wesentliche Gehalt dieses Werkes zu liegen. Warum für die Einführung der Abstraktionen nicht bekannte Symbole verwendet worden sind, ist nicht ersichtlich. Fortlaufende Ergänzung des Textes durch Übungsbeispiele. Ein sehr gutes Register. Drei Anhänge: (A) Einführung in die kombinatorische Logik, (B) Andeutungen über die weitere Entwicklung des Systems, (C) Philosophische Betrachtungen.

H. Scholz.

Izumi, Yoshisa: Remarques sur la notion de la perfection. Tôhoku math. J.,

II. Ser. 4, 252–256 (1952).

The author claims to demonstrate various theorems concerning „la perfection forte“, „la perfection faible“ and „Entscheidbarkeit“ of axiom systems for propositional logic. It is clear that „la perfection forte“ means „strong completeness“ and that the author's first theorem „Si A est contradictoire, A est fortement parfait“, is undoubtedly correct. But the reviewer is unable to understand either the intended meaning of the author's definitions of the other two concepts or the logical steps by which he proves the remaining theorems. From some of the examples and references given it seems that „ A est décidable“ is intended to mean that there is an effective method for deciding whether a given well formed formula is derivable from A , and that „ A est faiblement parfait“ is intended to mean „ A is weakly complete“ in a sense due to Tarski; viz. that there exists some assignment of truth tables to the primitive connectives (the author allows any finite or denumerable number of truth values) such that the set of well formed formulae which take only designated values coincides with the set of formulae derivable from A . But with this interpretation some of the author's statements become false and his reasoning is clearly not adequate to prove any of theorems 2, 3, 4.

J. C. Shepherdson.

Swift, J. D.: Algebraic properties of n -valued propositional calculi. Amer. math. Monthly 59, 612–621 (1952).

In this paper n -valued propositional calculi are investigated from several algebraic standpoints. After considering the general algebra in terms of its basic structure the author discusses the problem of determining under what operations the binary composition algebra, i. e., the algebra of all functions defined on the range $0, 1, \dots, n-1$ to the range, is a ring. He then considers partial orderings of the range and discusses briefly the lattice properties of the algebra and of the ideals in the ring structure. Finally, in the 3-valued case, all commutative Sheffer functions are listed. Except in the last part of the paper some of the material is expository.

A. Rose.

Hasenjaeger, Gisbert: Topologische Untersuchungen zur Semantik und Syntax eines erweiterten Prädikatenkalküls. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 1, 99–129 (1952).

Die Untersuchungen beziehen sich auf den durch Funktionsvariablen erweiterten Prädikatenkalkül 1. Stufe mit und ohne Identität. Jeder Erfüllung einer Ausdrucksmenge in einem beliebigen Bereich wird eine modifizierte Erfüllung in einem durch die Funktionszeichen bestimmten universellen Bereich zugeordnet. Nach einer auf Mostowski zurückgehenden Topologisierung lassen sich die universellen Erfüllungen als Punkte eines kompakten topologischen Raumes \mathfrak{E} auffassen. Mittels einer symbolischen Auflösung der Quantoren konstruiert Verf. einen abgeschlossenen Relativraum \mathfrak{E}_A , in dem für jeden überhaupt erfüllbaren Ausdruck eine Erfüllung existiert und jede Erfüllungsmenge zugleich offen und abgeschlossen ist. Aus der Kompaktheit von \mathfrak{E}_A folgen die beiden Sätze: A. Ist ein Ausdruck für unendlich viele endliche Anzahlen erfüllbar, so ist er im Abzählbaren erfüllbar. B. Eine Ausdrucksmenge M ist erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von M erfüllbar ist. — Unter Benutzung von Satz B beweist Verf. die verallgemeinerte semantische Vollständigkeit: Eine geschlossene Ausdrucksmenge ist genau dann erfüllbar, wenn sie widerspruchsfrei ist. Hiermit ergibt sich die Umfangsgleichheit des syntaktischen und des semantischen Folgerungsbegriffes, wie sie K. Schröter für den Prädikatenkalkül aufgezeigt hat, auch für den durch die Funktionszeichen erweiterten Kalkül. — Als Anwendung auf die Zahlentheorie führt Verf. einen Existenzsatz über Modelle zu unableitbaren Ausdrücken an.

Kurt Schütte.

Goodman, Nelson: New notes on simplicity. J. symbolic Logie 17, 189—191 (1952).

Um allgemeine Arten von endlichen Mengen ein- und mehrstelliger Prädikate so zu klassifizieren, daß daraus hervorgeht, ob die eine Art unter die andere fällt, hat Verf. in früheren Arbeiten einen „Zusammensetzungswert“ für Prädikate eingeführt [dies. Zbl. 41, 148 und The structure of appearance (Cambridge Mass. 1951), S. 59—75]. Zu dem dort entwickelten Berechnungsverfahren des Zusammensetzungswertes werden hier einige Ergänzungen und Erläuterungen gegeben. Insbesondere wird eine Zurückführung beliebiger Prädikate auf irreflexive Prädikate herangezogen.

Kurt Schütte.

Tarski, Alfred: Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 705—720 (1952).

Eine Übersicht über die vom Verf. entwickelte Theorie der arithmetischen Klassen und ihre Anwendungen. Eine arithmetische Klasse ist eine Menge von universellen Algebren einer Spezies (im Sinne von G. Birkhoff), die sich mit den Mitteln der Prädikatenlogik definieren läßt, wobei sich die Individuenvariablen auf die Elemente und die Prädikatenvariablen auf die Relationen bzw. Funktionen der Algebra beziehen. Man kann diese metamathematische Erklärung auch in mathematische Form kleiden; wir geben die wichtigsten einschlägigen Definitionen und beschränken uns dabei (wie der Verf.) auf den Fall einer zweistelligen Operation $+$. Zur Vermeidung mengentheoretischer Schwierigkeiten empfiehlt es sich, nur solche Algebren $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle$ zu betrachten, deren Elementmengen A Teilmengen einer ein für allemal fixierten unendlichen Menge U sind. Unter einer „Funktion“ F verstehen wir eine Abbildung, die jeder Algebra $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle$ eine Menge von abzählbaren Folgen x von Elementen von A zuordnet. Speziell hat man die Funktionen T_{kl} und S_{klm} ; es ist $x \in T_{kl}$ genau dann, wenn $x_k = x_l$ und $x \in S_{klm}$ genau dann, wenn $x_k + x_l = x_m$. Die Klasse der „arithmetischen Funktionen“ ist die kleinste Klasse, die alle T_{kl} und S_{klm} enthält, und die abgeschlossen ist gegenüber endlicher Vereinigung, Komplementbildung und den Operationen \bigvee_k („äußere Cyklindrifizierung“); dabei ist $y = \bigvee_k F$ genau dann, wenn es ein $x \in F$ gibt, so daß $x = y_l$ für alle $l \neq k$. Zu einer festen arithmetischen Funktion F kann man die Menge der Algebren $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle$ betrachten, für welche $F(\mathfrak{A})$ mit der Menge aller Folgen von Elementen aus A übereinstimmt. Die Menge von Algebren, die man auf solche Weise erhält, sind die „arithmetischen Klassen“. Zwei Algebren heißen „arithmetisch äquivalent“, wenn es keine arithmetische Klasse gibt, die genau eine von ihnen enthält. Eine Menge von Algebren heißt „arithmetisch abgeschlossen“, wenn sie mit jeder Algebra auch alle arithmetisch äquivalenten enthält. — Verf. nennt 30 Sätze, ohne Beweis. Besonders wichtig ist ein Kompaktheitssatz, der dem Satz von Gödel-Henkin entspricht: Wenn der Durchschnitt einer Menge K von arithmetischen Funktionen leer ist (d. h. die Funktion ist, welche jedem $\mathfrak{A} = \langle A, + \rangle$ die leere Teilmenge der Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus A zuordnet), so ist schon der Durchschnitt einer endlichen Teilmenge von K leer. — Man kann die genannten Begriffe relativieren, indem man von vornherein nur eine feste Menge von Algebren eines Typs betrachtet, z. B. die Menge aller Gruppen. — Eine vollständige Übersicht über die arithmetischen Klassen, in die eine Algebrenmenge zerfällt, ist erst in wenigen Fällen erreicht worden, z. B. Mostowski-Tarski [Bull. Amer. math. Soc. 55, 65, 1192 (1949)], Szmielew [Bull. Amer. math. Soc. 55, 65, 1192 (1949)], Tarski [Bull. Amer. math. Soc. 55, 63—64, 1192

(1949)]. — Andere Anwendungen: Existenzbeweise für Algebren mit vorgeschriebenen Eigenschaften, Übertragung von Sätzen für spezielle Algebren auf größere Algebrenklassen.

H. Hermes.

Berezki, Ilona: Existenz einer nichtelementaren rekursiven Funktion. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 409—413, russische und deutsche Zusammenfassgn. 414, 415—417 (1952) [Ungarisch].

Eine arithmetische Funktion heiße elementar, wenn sie sich durch endlich viele Substitutionen aus den Funktionen $1, x, y, \dots, a + b, |a - b|, a \cdot b, \left[\frac{a}{b}\right]$ und den

Funktionalen $\sum_{n=0}^x$ und $\prod_{n=0}^x$ gewinnen läßt. Alle elementaren Funktionen sind primitiv rekursiv. Dagegen ist die durch ${}^0a = 1, {}^{n+1}a = a^{({}^na)}$ definierte primitiv rekursive Funktion ba nicht elementar, da sich zu jeder elementaren Funktion $f(a, b, \dots)$ ein m so finden läßt, daß $f(a, b, \dots)$ durch mx mit $x = \max(a, b, \dots)$ majorisiert wird. Beweis durch Induktion über den Aufbau der elementaren Funktionen.

W. Markwald.

● **Boole, George:** *Studies in logic and probability.* London: Watts and Co., Ltd. 1952. 500 p. 25 s.

In diesem Bande sind siebzehn Einzelstudien gesammelt: zwölf zur Theorie der Wahrscheinlichkeit, eine philosophische Vorlesung unter dem Titel „The Claims of Science, especially as founded in its relation to Human Nature“, und vier Studien zur Idee eines Logikkalkls. Für die wahrscheinlichkeitstheoretischen Studien fühle ich mich nicht zuständig. Die Booleschen Ideen in diesem Bereich scheinen sich aber nicht durchgesetzt zu haben, so daß gefragt werden darf, durch welches tieferliegende Interesse die Reproduktion dieser Studien bestimmt worden ist. Dieses Interesse wird darin zu suchen sein, daß Boole auf eine ihm eigentümliche Art seinen Logikkalkl als ein zusätzliches Hilfsmittel für die Lösung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Problemen in Funktion gesetzt hat. Die philosophische Vorlesung ist insofern von Interesse, als das ungewöhnlich vornehme Profil, das dieser Sammlung vorangestellt ist, durch sie auf eine unmittelbar erkennbare Art bestätigt wird. Von den vier Studien zur Idee eines Logikkalkls ist bei weitem die wesentlichste die erste: „The Mathematical Analysis of Logic“ (1847). Hier stt man auf die folgenden bahnbrechenden Sätze: „They who are acquainted with the present state of the theory of Symbolical Algebra, are aware, that the validity of the process of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination. Every system of interpretation which does not affect the truth of the relations supposed, is equally admissible, and it is thus that the same process may, under one scheme of interpretation, represent the solution of a question on the properties of number, under another, that of a geometrical problem, and under a third, that of a problem of dynamics or optics. This principle is indeed of fundamental importance, and it may with safety be affirmed, that the recent advances of pure analysis have been much assisted by the influence which it has exerted in directing the current of investigation.“ Hier ist die Hilbertsche Idee einer mathematischen Theorie und der an ihr haftende Begriff der Mathematik als Strukturforschung antezipiert mit einem Genauigkeitsgrade, den auch Hilbert nicht hat übertreffen können. Es wird sogar gefragt werden dürfen, ob er in der Beschreibung dessen, was er in den „Grundlagen der Geometrie“ effektiv geleistet hat, die Boolesche Genauigkeitsstufe überall erreicht hat. Eine einzige Bemerkung ist vielleicht noch erforderlich in bezug auf die Booleschen „laws of combination“. Sie sind zu interpretieren als die in dem abstrakten Postulatensystem einer mathematischen Theorie enthaltenen Anforderungen an ein Modell dieses Postulatensystems. — Als Einführung in die Booleschen Studien, insbesondere in seinen Logikkalkl, ist eine 40 Seiten umfassende Vorrede von R. Rhees vorangestellt. Es scheint mir, daß diese Einführung, mit allem, was der Verf. zu sagen hat, das nicht leistet, was zu wünschen gewesen sein würde: eine Spiegelung der Booleschen Schöpfung an dem gegenwärtigen Stande der Booleschen Algebra. Man wird vor allem vermissen dürfen, daß nichts gesagt ist zur Stoneschen Theorie der Booleschen Ringe, die der Booleschen Schöpfung von Allen späteren Umformungen bei weitem am nächsten kommen. Man erfährt also erst recht nichts von der Bedeutung, welche die über diesen Ringen definierbaren Booleschen Ideale und in topologischer Hinsicht die über den verallgemeinerten Booleschen Körpern definierbaren Booleschen Räume durch die Forschungen von Tarski, Stone und Mostowski für den Systemkalkl gewonnen haben. Und wer sind die Algebraiker, auf deren Forschungen sich Boole in dem ersten Satz des mitgeteilten Probestcks bezieht? Es ist ein Zufall, daß ich zu wissen glaube, daß er an Gregory und an Peacock gedacht hat. — Von den übrigen Beigaben soll hier wenigstens noch die schlichte Biographie genannt sein, die R. Harley 1866, zwei Jahre nach Booles Tod, verfaßt hat. Unter den schönen menschlichen Zügen, denen man hier begegnet, wird die Herzensgüte, die ihm hier nachgesagt ist, besonders

hervorgehoben werden dürfen. Fragt man, für wen diese Sammlung nun eigentlich verfaßt ist, so stößt man auf ein Hindernis, das ich nicht beseitigen kann; denn das erste Stück ist erst vor kurzem durch einen Nachdruck Oxford, Basil Blackwell, 1948 wieder zugänglich gemacht worden, und die übrigen Stücke scheinen mir nur noch von einem beschränkten historischen Interesse zu sein. *H. Scholz.*

• **Wilder, Raymond L.: Introduction to the foundations of mathematics.** New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd., 1952. XIV, 305 S. \$ 5,75.

Das Buch hat nach des Verf. Angabe den Zweck, Studierenden, die die Mathematik hauptsächlich aus praktischen Gründen betreiben, einen Überblick über und eine erste Einführung in die modernen Grundlagenprobleme zu verschaffen; der Inhalt entspricht dem von Vorlesungen, die vom Verf. seit längerer Zeit mit dem gleichen Ziel gehalten wurden. Entsprechend ist die Anlage so, daß nicht gleich eine abstrakte Einführung in den gegenwärtigen Stand der Grundlagenfragen gegeben wird, sondern der Verf. hat vielfach den historischen Weg beschritten, indem er angibt, wo und wie gewisse Probleme zum ersten Male auftauchen und wie sie dann im weiteren Verlaufe der Entwicklung eine präzisere Fassung und Lösung (oder auch Nichtlösung) erfahren, z. B. wenn er die Entwicklung der axiomatischen Methode von Euklid bis zur Gegenwart kurz umreißt. Auf diese Weise ist eine Darstellung entstanden, die sich gut liest und die geeignet sein dürfte, gerade in dem Anfänger Interesse zu wecken. Am Ende der einzelnen Kapitel sind zum Teil Aufgaben eingestreut. Die Darstellung ist überall sachgemäß. Bei dem großen Umfang des dargestellten Stoffes konnten natürlich nur die Hauptprobleme, soweit sie die Grundlagenfragen berühren, jeweils erörtert werden, während auf manche Einzelheiten verzichtet werden mußte. Dafür enthalten die einzelnen Kapitel ein Verzeichnis von Werken, die für ein tieferes Eindringen in den Gegenstand in Frage kommen. Bei dem Literaturverzeichnis vermißt man allerdings manches; um nur ein Beispiel zu nennen, so vermißt man die Erwähnung des Enzyklopädieberichtes von A. Schmidt über „Mathematische Grundlagenforschung“. Verf. hat sich, abgesehen von der älteren Literatur (Dedekind, Frege usw.) wohl mit Rücksicht auf seinen Hauptleserkreis hauptsächlich auf die englisch geschriebene Literatur beschränkt, die aber nicht immer ein vollständiges Bild liefert. — Das Buch besteht aus zwei Hauptteilen. Teil I enthält die „grundlegenden Begriffe und Methoden der Mathematik“, während Teil II näher auf die eigentlichen Grundlagenprobleme eingeht. Um eine Vorstellung von dem Inhalt im einzelnen zu geben, müssen wir uns hier darauf beschränken, die Überschriften der einzelnen Kapitel zu geben. Teil I enthält folgende Kapitel: 1. Die axiomatische Methode, 2. Analysis der axiomatischen Methode, 3. Mengenlehre, 4. Unendliche Mengen, 5. Wohlgeordnete Mengen; Ordinalzahlen, 6. Das lineare Kontinuum und das System der reellen Zahlen, 7. Gruppen und ihre Bedeutung für die Grundlagen. — Teil II enthält die Kapitel: 8. Frühentwicklungen, 9. Die Frege-Russellsche These: Mathematik als Erweiterung der Logik, 10. Der Intuitionismus, 11. Der Formalismus, 12. Die kulturelle Lage der Mathematik. *W. Ackermann.*

Knebone, G. T.: Mathematical formalisms and their realizations. Philosophy 27, 138—147 (1952).

Algebra und Zahlentheorie.

Kombinatorik:

Duparc, H. J. A.: Verschlüsselungsprobleme. Math. Centrum. Amsterdam, Rapport ZW 1952—012, 7 S. (1952) [Holländisch].

Unter Kodierung (Verschlüsselung) von Dingen oder Begriffen versteht man die Zuordnung geeignet gewählter Elementkombinationen zu diesen Dingen bzw. Begriffen. Die Elemente sind dabei meist Buchstaben oder Ziffern. Verf. berichtet über Kodierung von natürlichen Zahlen durch Kombinationen einer festen Anzahl n von Nullen und Einsen ($n \geq 4$). Bekannt ist die durch die dyadische Schreibweise vermittelte Kodierung. Verf. betrachtet eine Kodierung natürlicher Zahlen N , die man dadurch erhält, daß man von einer beliebigen, aber festen Kodierung der Ziffern $0, 1, \dots, 9$ ausgeht und dann sukzessive diese Kodierung auf jede der (dekadischen) Ziffern von N anwendet. Das Rechnen (Addition und Multiplikation) mit den so entstehenden Elementkombinationen wird behandelt und auf Operatoren mit Gruppeneigenschaft zurückgeführt. Ferner wird die zweckmäßige Wahl der Ausgangskodierung der Ziffern $0, 1, \dots, 9$ diskutiert, wobei offenbar an eine Anwendung bei der Konstruktion von Rechenautomaten gedacht ist. — Betrachtet man den Aufbau der Ziffern aus Nullen und Einsen als Sonderfall des Aufbaues von

Dingen aus einfachen genormten Bausteinen, so ergibt sich eine Berührung der Arbeit mit der (später erschienenen) Schrift von A. Nasvytis, Die Gesetzmäßigkeiten kombinatorischer Technik, Berlin 1953.

H. Rohrbach.

Thrall, R. M.: A combinatorial problem. Michigan math. J. 1, 81—88 (1952).

Soit $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, $a_1 > a_2 > \dots > a_k > 0$, une partition de l'entier naturel m en entiers a_i inégaux. On dispose à volonté les entiers $1, 2, \dots, m$ d'une façon correspondante à la partition (a) dans a_1 lignes et k colonnes, le premier entier de la i ème colonne partant de la i ème ligne. Une telle disposition est appelée un étiquetage (labelling) de (a) . L'étiquetage est dit régulier si les entiers vont en croissant, de gauche à droite dans chaque ligne et de haut en bas dans chaque colonne. Le résultat principal de l'A. est l'obtention du nombre $g(a)$ des étiquetages réguliers de (a) : $g(a) = [(a_1 + a_2 + \dots + a_k)! \Delta(a)] / [a_1! a_2! \dots a_k! \nabla(a)]$ où $\Delta(a) = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$ et $\nabla(a) = \prod_{i>j} (a_i + a_j)$.

S. Bays.

Lineare Algebra. Polynome. Formen:

Stein, P.: A note on bounds of multiple characteristic roots of a matrix. J. Res. nat. Bur. Standards 48, 59—60 (1952).

Es sei λ ein Eigenwert der komplexen (n, n) -Matrix $A = (a_{ik})$, zu welchem es $m \leq n$ linear unabhängige Eigenvektoren gibt. Dann erfüllt λ mindestens m von den n Ungleichungen $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_k |a_{ik}|$ ($i = 1, 2, \dots, n; k \neq i$). H. Wielandt.

Mitchell, Josephine: The kernel function in the geometry of matrices. Duke math. J. 19, 575—583 (1952).

Let $Z = Z^{(m,n)} = (z_{j,k})$, $(1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq n)$ be an $m \times n$ matrix and $Z^{*'}$ the conjugate transpose of Z and I the identity matrix. We consider the set D of points such that $I - ZZ^{*'}$ is positive definite. The author proves that the kernel function in D is $\det(I - ZZ^{*'})^{-p}/V$, V the Euclidean volume of D . If Z is a rectangular $m \times n$ matrix, $p = m + n$; if Z is symmetric, $p = n + 1$, and if Z is skew-symmetric, $p = n - 1$. The method is based on the minimal property of the kernel function. Behaviour of the kernel function as the point Z approaches the boundary of D has been studied.

L. K. Hua.

Hua, Loo Keng: Fundamental theorem of the projective geometry on a line and geometry of matrices. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 317—324, ungarische und russische Zusammenfassgn. 324—325, 325 (1952).

Soient x_1, x_2 deux éléments non simultanément nuls d'un corps K , commutatif ou non, de caractéristique $\neq 2$. Deux couples $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ définissent le même point s'il existe un $k \in K$ tel que $x_1 = k y_1, x_2 = k y_2$. L'ensemble des points est la droite projective $\Pi(K)$. Si $x_2 \neq 0$, on posera $z = x_2^{-1} x_1$. Soient $a, b, c, d \in K$, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible s'il existe $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La transformation (1) $z' = (a z + b)(c z + d)^{-1}$, équivalente à $z' = (-z c' + a')^{-1} \cdot (z d' - b')$, définit une correspondance biunivoque de Π sur elle-même. Soit σ un automorphisme ou un antiautomorphisme de K , l'application (2) $z' = z^\sigma$ combinée avec (1) nous donne (3) $z' = (a z^\sigma + b)(c z^\sigma + d)^{-1}$. Quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 constituent un quaterne harmonique si $(z_2 - z_4)^{-1}(z_2 - z_3)(z_1 - z_3)^{-1}(z_1 - z_4) = -1$. L'A. établit que toute application bi-univoque de Π sur elle-même, transformant un quaterne harmonique en un quaterne harmonique, est une transformation (3) et réciproquement.

Th. Lepage.

Cherubino, Salvatore: Sopra certe famiglie di matrici. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 6, 69—73 (1952).

Die in einer Note von C.C. MacDuffee betrachtete Familie Lorentzscher Matrizen (dies. Zbl. 44, 7) wird vom Verf. verallgemeinert. Verf. bezieht sich dabei auf die

von ihm veröffentlichten Arbeiten (dies. Zbl. 17, 209; 19, 223). Es handelt sich dabei um die Auflösung der linearen Differentialgleichung $dy/dx = y P(x)$, in welcher x selbst eine Matrix bedeutet, und wobei als Lösungen nur reguläre Funktionen von Matrizen zugelassen werden. Dadurch werden die MacDuffeeschen Ergebnisse insofern verallgemeinert, als in der Arbeit des letzteren nur der Fall skalarer Veränderlicher behandelt wird.

W. Quade.

Rényi, A. and P. Turán: On the zeros of polynomials. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 275—284 (1952).

Die Ergebnisse der Untersuchung von P. Turán, dies. Zbl. 43, 124, werden in einigen Punkten verschärft. Vermutungen über weitere Verschärfungsmöglichkeiten schließen sich an. Das Verfahren von Bernoulli-Graeffe wird gekennzeichnet als ein Anwendungsgebiet von Abschätzungen von Ausdrücken der Form $|\sum b_v w_v^t|$ nach unten. Dies ist Gegenstand eines inzwischen erschienenen Buches von P. Turán, „Über eine neue Methode der Analysis und ihre Anwendungen“ (Budapest 1953).

Robert Schmidt.

Eichler, Martin: Idealtheorie der quadratischen Formen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 14—37 (1952).

Verf. gibt eine Einführung in die Hauptgedanken seines Lehrbuches „Quadratische Formen und orthogonale Gruppen“ (Berlin 1952). Zu beachten ist, daß das Wort „orthogonal“ in erweitertem Sinne zu nehmen ist, es bezeichnet die automorphen linearen Transformationen einer quadratischen Form. Von dem Grundkörper der Koeffizienten der Formen wird angenommen, daß er eine diskrete nicht-archimedische Bewertung besitzt. Behandelt werden die Spinordarstellung der orthogonalen Gruppe, die einer quadratischen Form zugeordneten Gitter und Ideale und die Spinorgeschlechter.

H. Brandt.

Eichler, Martin: Arithmetics of orthogonal groups. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 65—70 (1952).

Auszug eines Vortrages über die Zahlentheorie der quadratischen Formen in algebraischen Zahlkörpern, den Verf. im Jahre 1950 beim Internat. Math.-Kongr., Cambridge, Mass., gehalten hat. Im Falle, daß die Koeffizienten der Formen zum rationalen Zahlkörper gehören, findet man eine ausführliche Darstellung vom Verf. über denselben Gegenstand in den beiden Arbeiten dies. Zbl. 29, 342. M. Moriya.

Gruppentheorie:

● **Borůvka, O.:** Einführung in die Gruppentheorie. 2. Aufl. Prag: Přírodovědecké Vydavatelství 1952. 154 S. 127 Kcs [Tschechisch].

Dies ist die stark erweiterte 2. Aufl. einer 1944 zuerst erschienenen Schrift des Verf., eine wohldurchdachte, moderne und originelle Einführung in einen wichtigen Teil der abstrakten Algebra. Sie zerfällt in drei Kapitel: I. Mengen; II. Gruppoide; III. Gruppen. Schon in Kap. I werden u. a. eine Reihe neuartiger Begriffsbildungen eingeführt, die sich in II und III als wertvoll erweisen, indem sie gewisse Sätze über Gruppoide (vgl. unten) und Gruppen allgemeiner zu formulieren gestatten, als es sonst geschieht. Abgesehen von dem Begriff einer Zerlegung (1) „in“ und (2) „(auf) einer Menge“ G , d. i. ein System von nicht-leeren, elementefremden Teilmengen von G , das im Falle (2) alle Elemente von G einschließt, sei hier erwähnt die Hülle einer Teilmenge B in einer Zerlegung \bar{A} in G , d. i. die Menge aller $a \in \bar{A}$, die ganz oder teilweise in B liegen, mit $B \sqcap \bar{A}$ bezeichnet; der Durchschnitt (průsek) einer Teilmenge B mit \bar{A} , d. i. die Menge aller nicht-leeren Durchschnitte (průniky) der einzelnen Elemente $a \in \bar{A}$ mit B , durch $\bar{A} \cap B$ bezeichnet. Ferner Ketten in Zerlegungen; die kleinste gemeinsame Überdeckung $[A, \bar{B}]$ und die größte gemeinsame Verfeinerung (\bar{A}, \bar{B}) zweier Zerlegungen; endlich die Ergänzungszерlegung. Es folgt ein Abschnitt, der von Abbildungen (Funktionsbegriff) handelt, insbesondere in Zerlegungen. Jede Abbildung g von G auf G^* bestimmt eine „erweiterte Abbildung“ g des Systems aller Teilmengen von G auf das System aller Teilmengen von G^* . Mehrdeutige Abbildungen werden „verallgemeinert“ genannt. Eine solche Abbildung g von G auf sich gibt Anlaß zu einer „Kongruenz“, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Sei ga das System der dem Element a durch g zugeordneten Elemente von G und 1. $a \in ga$, 2. aus $c \in gb$, $b \in ga$

folgt $c \in \mathfrak{g} a$. Eine Kongruenz heißt symmetrisch oder eine Äquivalenz, wenn aus $a \in \mathfrak{g} b$ folgt $b \in \mathfrak{g} a$. Die zu einer Äquivalenz gehörigen Klassen bilden eine Zerlegung auf G . Eine Kongruenz \mathfrak{g} heißt antisymmetrisch, wenn aus $b \in \mathfrak{g} a$ und $a \in \mathfrak{g} b$ folgt $a = b$. In diesem Falle ist es üblich $a \leq b (\mathfrak{g})$ an Stelle von $b \in \mathfrak{g} a$ zu schreiben; die antisymmetrische Kongruenz bestimmt eine teilweise Ordnung in G . Mit Rücksicht auf diese gibt es für jedes Paar von Elementen a, b eine obere Grenze $c = a \cup b$, so daß $a \leq c$ und $b \leq c$ und zugleich für alle $x \geq a$ und $\geq b$ gilt $c \leq x$. Ähnlich die untere Grenze $a \cap b$. Bezüglich dieser Verknüpfungen ist G ein Verband. — Unter einem Gruppoid \mathfrak{G} (Kap. II) versteht Verf. die Vereinigung einer Menge G mit einer Kompositionsvorschrift (Multiplikation) M , ohne Voraussetzung von Assoziativität oder sonst irgendeiner Beschränkung; \mathfrak{G} heißt das Feld des Gruppoids \mathfrak{G} . Es wird der Komplexkalkül in \mathfrak{G} entwickelt und die Begriffe des Untergruppoids und des Ideals $A (GA \cap A)$ eingeführt. Es folgen Homomorphismus (genannt „Deformation“ (deformace)), Isomorphismus, Automorphismus. Eine „erzeugende Zerlegung“ \bar{A} ist eine solche, wo es zu jedem geordneten Paar $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ ein $c \in \bar{A}$ gibt, derart, daß $a \bar{b} \subset c$ ist. Zum Feld \bar{A} wird dann das „Faktoroid“ $\bar{\mathfrak{A}}$ erklärt als das Gruppoid mit der Multiplikation $a \cdot \bar{b} = \bar{c}$, wenn $a \bar{b} \subset c$. Auf diese Faktoroiden werden die in Kap. I bereitgestellten Begriffe (Hülle, Durchschnitt etc.) angewandt. Es folgen Sätze über Isomorphismen und Deformationen, sowie über spezielle Gruppoiden, wie z. B. assoziative (Halbgruppen), Gruppoiden mit Einselement und Gruppen. Am Schluß des Kapitels ist kurz von Verbänden die Rede, die als Gruppoiden mit zwei Multiplikationen eingeführt werden. — Soweit wird also gezeigt, was man in der Gruppentheorie unter Umgehung des Assoziativgesetzes erreichen kann. In Kap. III werden dann Gruppen systematisch studiert, wobei die vorangehenden Ergebnisse oft zu erweiterten Formulierungen bekannter Sätze führen. Die linke Restklassenzerlegung nach einer Untergruppe \mathfrak{A} der Gruppe \mathfrak{G} werde durch $\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}$ bezeichnet. Bestimmt man die kleinste gemeinsame Überdeckung und die größte gemeinsame Verfeinerung von Zerlegungen nach zwei verschiedenen Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, so gilt $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}) = \mathfrak{G}/_l \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, und wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{B} vertauschbar sind: $(\mathfrak{G}/_l \mathfrak{A}, \mathfrak{G}/_l \mathfrak{B}) = \mathfrak{G}/_l \mathfrak{AB}$. Sind ferner $\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ und \mathfrak{C} Untergruppen von \mathfrak{G} und sind \mathfrak{A} und \mathfrak{C} vertauschbar, so sind $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$ und \mathfrak{A} vertauschbar und $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) \mathfrak{A}$ ist eine Untergruppe und es gilt

$$\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}/_l \mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}) \mathfrak{A}/_l \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}/_l \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_l (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}).$$

Als nützlich erweist sich die folgende Bemerkung: Wenn die Restklassen $a \mathfrak{A}, b \mathfrak{B}$ aus Zerlegungen bez. der Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gemeinsame Elemente haben, so ist $a \mathfrak{A} \cap b \mathfrak{B}$ linke Restklasse bez. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Dies wird benutzt beim Beweis des Satzes von Ore über Normalteiler $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$, wonach $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) = \mathfrak{AB} \cap \mathfrak{C}$ ist. Das Buch schließt mit einem Abschnitt über zyklische Gruppen. Es enthält durchwegs viele Beispiele und Übungsaufgaben. Auf präzisen Ausdruck wird der größte Wert gelegt (vgl. die grammatische Bemerkung am Anfang von Kap. I). — (In § 3.9.1.3, Zeile 5 und 8 scheint das Wort „uspořádané“ überflüssig zu sein. Im Beispiel 5.5.4, Zeile 5, sollte das Wort „Primzahlen“ (prvočíslo) durch „Primfaktoren“ ersetzt werden. Auf S. 36, Zeile 3 werde G durch G^* ersetzt.)

H. Schwerdtfeger.

• Tvermoes, Helge: Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs. Kopenhagen: Dissertation der math.-naturw. Fakultät 1952. XII, 107 S. [Dänisch].

Eine n -Gruppe N ist eine Menge von Elementen, in der jedem geordneten $(n+1)$ -Tupel (a_1, \dots, a_{n+1}) von Elementen $a_i \in N$ ein $a \in N$ eindeutig zugeordnet ist. Dabei wird verlangt, daß $a_1 \dots (a_i \dots a_{i+n}) \dots a_{2n+1}$ unabhängig von i ist (Assoziativgesetz) und daß $(1) a_1 \dots a_{i-1} x_i a_{i+1} \dots a_n = a$ auflösbar ist mit $x_i \in N$. [Vgl. Dörnte, Math. Z. 29, 1—19 (1929)]. Ist \mathfrak{G} eine Gruppe mit Normalteiler \mathfrak{N} von zyklischer Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ der Ordnung n , ist ferner \bar{N} eine primitive Restklasse aus $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, so bilden die Elemente von N (bei Anwendung der gewöhnlichen Gruppenmultiplikation in \mathfrak{G}) eine n -Gruppe N . Es heiße \mathfrak{G} die N umschriebene Gruppe. Das Hauptergebnis der Arbeit besagt, daß jede n -Gruppe N eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte umschriebene Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(N)$ besitzt. Der Normalteiler \mathfrak{N} heißt Hauptgruppe für N . Eine unmittelbare Folge dieses Einbettungssatzes ist die eindeutige Auflösbarkeit von (1). Betrachtet man in einer r -Gruppe R nur stets Produkte von $n+1$ Elementen ($r|n$), so erhält man eine n -Gruppe N . Man sagt: N ist aus R abgeleitet. Wenn N nicht als abgeleitet aufgefaßt werden kann, so heißt N echt. Mit Hilfe des Einbettungssatzes lassen sich alle r -Gruppen angeben, aus denen eine vorgelegte n -Gruppe N abgeleitet werden kann, insbesondere läßt sich entscheiden, ob N echt ist. Man erhält einen Überblick über sämtliche (echten) n -Gruppen, indem man in jeder Gruppe \mathfrak{G} diejenigen Normalteiler \mathfrak{N} aufsucht, welche im Sinne des Einbettungssatzes Anlaß zu echten n -Gruppen geben. Im letzten Abschnitt der Arbeit werden diese „echten Hauptgruppen“ \mathfrak{N} in jeder Gruppe \mathfrak{G} angegeben. — Die Arbeit enthält sehr viele Einzelheiten (96 Sätze), auf die hier nicht eingegangen werden kann.

W. Maak.

Gonçalves, J. Vicente: On groups having a set of p -Sylow subgroups. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 161—168 (1952).

Verf. beweist als Theorem 1 den Satz „Sind $H = H_1, H_2, \dots$, die p -Sylow-Gruppen (p -S.-Gr.) der endlichen Gruppe \mathfrak{G} und ist $H \cap H_2 = \mathfrak{D}$ nicht echte Untergruppe eines anderen Durchschnittes $H \cap H_i$, so enthält der Normalisator in \mathfrak{G} von \mathfrak{D} Elemente von zu p primter Ordnung“. Verf. hält diesen Satz für eine Verallgemeinerung des Satzes von Burnside über größte Durchschnitte; das ist ein Irrtum; aus Satz 4, § 3 der Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 30, 8) geht sofort hervor, daß bei obiger Annahme \mathfrak{D} ein größter Durchschnitt ist. Daher sind seine Theoreme 2 und 3 im Satz von Zassenhaus über größte Durchschnitte enthalten (s. obg. Arbeit S. 15), während sein Theorem 4 aus Satz 1, § 3 dort trivial folgt. Für sein Theorem 5 definiert der Verf.: „Als n -te Untergruppe von $H = H_1$ werde der Durchschnitt von H mit n weiteren Untergruppen H_i , etwa z. B. $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{n+1}$ bezeichnet, falls er echte Untergruppe von $H_2 \cap \dots \cap H_{n+1}$ ist. Eine maximale n -te Untergruppe von H sei eine n -te Untergruppe von H , die nicht echte Untergruppe des Durchschnittes von H mit irgendwelchen weiteren n H_i, \dots, H_n ist.“ Verf. beweist: Theorem 5: „Ist $n \leq p$ und \mathfrak{D} ein maximaler n -ter Durchschnitt von H , so enthält der Normalisator von \mathfrak{D} ein Element von zu p primter Ordnung, welches nicht im Normalisator von H liegt“. Der Satz wäre recht interessant, leider hat aber Verf. unterlassen, sich von der Existenz solcher Durchschnitte zu überzeugen. Und Tatsache ist: Solche Durchschnitte existieren gar nicht für $n > 1$ und für $n = 1$ nur, wenn man die H_i selbst als 0-te Durchschnitte bezeichnet. Dann ist aber \mathfrak{D} ein größter Durchschnitt, für $n = 1$ ist also Theorem 5 nur der Satz von Burnside. Ist $n > 1$, so folgt aus $H_2 \cap \dots \cap H_{n+1} \supset H \cap H_2 \cap \dots \cap H_{n+1} = \mathfrak{D}$, daß \mathfrak{D} kein größter Durchschnitt sein kann. Nach dem oben erwähnten Satz 4, § 3 der Arbeit des Ref. enthält dann jede der \mathfrak{D} enthaltenden H_i einen größten Durchschnitt $\mathfrak{D}_i \supset \mathfrak{D}$; dieser, also auch \mathfrak{D} , ist in $k_i p + 1$ verschiedenen p -S.-Gr. H_i von \mathfrak{G} enthalten, $k_i \geq 1$. Ist also \mathfrak{D}_1 ein in H liegender \mathfrak{D} enthaltender größter Durchschnitt, so gibt es mindestens p weitere H_{i_1}, \dots, H_{i_p} die $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}$ enthalten, also ist $H \cap H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_p} = \mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}$, daher ist \mathfrak{D} kein maximaler p -ter Durchschnitt von H , und dasselbe gilt für $n < p$.

O. Grün.

Trofimov, P. I.: Über den Einfluß der Anzahl der Klassen aller nichtinvarianten konjugierten Untergruppen auf die Eigenschaften einer endlichen Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 1075—1076 (1952) [Russisch].

Sia G un gruppo finito di ordine g ; $\varrho(G)$ il numero delle classe di sottogruppi coniugati non invarianti di G ; $\tau(g)$ il numero dei differenti divisori primi di g . L'A. comunica una serie di risultati, che si possono all'incirca così raggruppare. Condizioni sufficienti per la risolubilità di G . Esistono, per ogni intero naturale k , gruppi risolubili finiti non speciali contenenti k classi di sottogruppi coniugati non invarianti (teor. 1.) — Affinchè un gruppo finito G , per il quale $\varrho(G) = k > 1$, sia risolubile, è sufficiente che l'intersezione di due rappresentanti qualunque di due classi qualsiasi di sotto gruppi coniugati non invarianti di G si riduca al sottogruppo identico (teor. 3; in esso vengono assegnate altre due condizioni sufficienti derivanti da quella ora enunciata). Se $\varrho(G) \leq 6$, il gruppo G è sempre risolubile (teor. 2). Gruppi finiti non speciali per i quali $\tau(g) = \varrho(G) = 3$ (e g è divisibile per il quadrato di un numero primo), oppure $\tau(g) = \varrho(G) = 4$: ve ne sono di 5 tipi (teorema 5: la classificazione dei gruppi finiti per i quali $\varrho(G) = 1$, o 2, è stata fatta a suo tempo da O. Ju. Schmidt). Caso dei gruppi finiti speciali. Per ogni k , esistono gruppi finiti speciali per i quali $\varrho(G) = k$ (teor. 6). Se G è speciale, sotto varie ipotesi particolari, si assegnano varie relazioni aritmetiche di disuguaglianza tra $\varrho(G)$ e $\tau(g)$ (teorema 7 e sue conseguenze).

L. Lombardo-Radice.

Brauer, Richard: On the representations of groups of finite order. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 33—36 (1952).

Let G be a finite group and consider representations of G of finite degree with coefficients in an algebraically closed field K of characteristic zero. The author asks to what extent the properties of representations of G are determined by properties of representations of suitable subgroups of G . The following is an example: A group is said to be elementary, if it is the direct product of a cyclic group and a p -group. Then a function defined on G with values in K is an irreducible character of G if and only if it is a class function on G , its mean square over G is 1, and its restriction to any elementary subgroup H of G is a character of H (not necessarily irreducible). This condition is modified to give one which does not involve a complete knowledge of the characters of elementary groups. — Another example is the practical determination of the Schur index in the case where K , though still of characteristic zero, is no longer algebraically closed. It is indicated how this determination can be reduced to finding the Schur index of a representation of a semi-elementary group, i.e. a group with a normal cyclic subgroup whose factor group is a p -group. In particular this is shown to lead to the author's theorem (Brauer, this Zbl. 34, 161), that every representation of G can be written in the field of n -th roots of unity, where n is the least common multiple of the orders of the elements of the groups. P. M. Cohn.

Gorčinskij, Ju. N.: Gruppen mit einer endlichen Anzahl von Klassen konjugierter Elemente. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 167—182 (1952) [Russisch].

Verf. beweist folgende Tatsache: 1. Sei G eine Gruppe, in der als Ordnungen der Elemente endlicher Ordnung s verschiedene Primzahlen auftreten. Für jedes $n \geq s + 1$ läßt sich dann eine Obergruppe von G angeben, die n Klassen konjugierter Elemente enthält. 2. Die Menge der nichtisomorphen abzählbaren Gruppen mit $n \geq 3$ Klassen konjugierter Elemente hat die Mächtigkeit des Kontinuums. — Die Beweismethoden stützen sich auf die B. H. Neumannsche Theorie der verallgemeinerten freien Produkte.

L. Kaloujnine.

MacLane, Saunders: Cohomology theory of Abelian groups. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 8—14 (1952).

Bericht über die algebraische Seite der Arbeiten von Eilenberg und MacLane, dies. Zbl. 37, 395; 39, 190. Vgl. auch Eilenberg-MacLane, dies. Zbl. 42, 414; 43, 254; 46, 167; 50, 393).

E. Burger.

Baer, Reinhold: The cohomology theory of a pair of groups. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 15—20 (1952).

Let Q be a group with two subgroups R, S such that $Q = RS = SR$, $1 = R \cap S$ and let $s r^s = r s^r$ ($r \in R, s \in S$). Let G be a left Q -modulus. The relationship of cohomology groups $H^n(R, G)$, $H^n(S, G)$ is studied in connection of the cohomology groups $H^n(Q, G)$ and their subgroups. Thus, firstly, if (I) there is an idempotent endomorphism of Q upon R such that the kernel operates trivially on G , then $H^n(R, G)$ may be considered as a direct summand in $H^n(Q, G)$. Next, for double (i, j) -cochains $f_{i,j}$ on the pair (R, S) , define

$$(\delta_S f_{i,j})(r_1, \dots, r_i, s_1, \dots, s_{j+1}) = f_{i,j}(r_1^{s_1}, \dots, r_i^{s_i}, s_2, \dots, s_{j+1})$$

$$+ \sum_{k=1}^j (-1)^k f_{i,j}(r_1, \dots, r_i, s_1, \dots, s_k s_{k+1}, \dots, s_{j+1}) + (-1)^{j+1} f_{i,j}(r_1, \dots, r_i, s_1, \dots, s_j),$$

and similarly with δ_R . In the group $C^n(R, S; G)$ composed of the sequences $h = [h_{0,n}, \dots, h_{i,n-i}, \dots, h_{n,0}]$ of double $(0, n)$ -, ..., $(i, n-i)$ -, ..., $(n, 0)$ -cochains, define

$$\delta h = [\delta_S h_{0,n}, \dots, \delta_R h_{i-1, n-i+1} + (-1)^i \delta_S h_{i, n-i}, \dots, \delta_R h_{n,0}],$$

to obtain cohomology groups $H^n(R, S; G)$. There exists then a certain homomorphism φ of $C^n(Q, G)$ into $C^n(R, S; G)$ which commutes with the coboundary operation and satisfies $f^\varphi = [f_{0,n}, \dots, f_{n,0}]$ with $f_{0,n}(s_1, \dots, s_n) = f(s_1, \dots, s_n)$, $f_{n,0}(r_1, \dots, r_n) = f(r_1, \dots, r_n)$. If the above condition (I) is satisfied, then $H^n(R, S; G) = H^n(R, G) \oplus H^n(S, G)$ for $n > 0$, where H_0^n consists exactly of those elements in $H^n(R, S; G)$ represented by h with $h_{n,0} = 0$. These analyses then lead to the followings, for instance: A) If (I) is satisfied and if S operates trivially on R (i. e. $r^s = r$), then $H(S, G) = 0$ for $0 \leq i \leq n$ implies $H^i(R, G) = 0$ for $0 \leq i \leq n$; B) If (I) and its (R, S) -symmetry are satisfied and if R, S operate trivially upon each other, then $0 = H^i(R, G) = H^i(S, G)$ for $0 \leq i \leq n$ implies $H^n(R, G) \cong H^n(S, G)$; C) Under the assumption in A), $0 = H^1(S, G) = \dots = H^n(S, G)$ implies that every cocycle in $Z^n(R, G)$ is cohomologous to a cocycle with values in $H^0(S, G)$. The pair of a group R and its normal subgroup S may be considered as a pair (R, S) under consideration, with $r^s = r$ and $s^r = r^{-1} s r$, and for this case cf. Lyndon, this Zbl. 31, 198. Further the methods of the paper are closely related to those of filtrations of Cartan-Koszul-Leray; cf. e. g. a (later) paper Hochschild-Serre, this Zbl. 50, 21 and the references there. C) generalizes Bergström, this Zbl. 31, 9 and the reviewer, this Zbl. 45, 13.

T. Nakayama.

Murnaghan, F. D.: On the Poincaré polynomials of the full linear group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 606—608 (1952).

Murnaghan, F. D.: On the Poincaré polynomials of the classical groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 608—611 (1952).

Murnaghan, F. D.: On the Poincaré polynomials of the classical groups. — Addendum. Proc. nat. Acad. Sci. USA 39, 48 (1953).

Das Poincarésche Polynom der n -dimensionalen vollen linearen Gruppe wird durch das Integral

$$P_n(z) = \frac{(1+z)^n}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \prod_{\kappa < \lambda} (\varepsilon_\kappa + z \varepsilon_\lambda) (\varepsilon_\kappa - \varepsilon_\lambda) \right|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_n$$

mit $\varepsilon_\kappa = \exp(2\pi i \varphi_\kappa)$ dargestellt. Verf. gibt einen unmittelbaren Beweis für die bekannte Darstellung $P_n(z) = (1+z)(1+z^3) \dots (1+z^{2n-1})$. — In der zweiten Arbeit wird ein anderer Weg angegeben, die Poincaréschen Polynome für die klassischen Gruppen (volle lineare orthogonale und symplektische Gruppe) zu

bestimmen. Es wird der Zusammenhang der Poincaréschen Polynome mit dem Eulerschen unendlichen Produkt $\prod_0^\infty (1 + z^{2\nu+1})$ erläutert. *W. Specht.*

Kloosterman, H. D.: The characters of binary modular congruence groups. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sep. 6, 1950) **1**, 275—280 (1952).

The binary modular congruence group (Modulargruppe) modulo N is the multiplicative group $G(N)$ of two-by-two matrices whose elements are residue classes of the integers modulo N and whose determinant is the unity residue class. The problem of determining the characters and representations of these groups can be reduced to the case $N = p^k$, where p is a prime number. In two previous papers [Ann. of Math., II. Ser. **47**, 317—375, 376—447 (1946)] the author determined explicitly most of the characters and irreducible representations of $G(p^k)$ by means of the transformation formulas of certain binary theta series under the substitutions of the modular group (Modulgruppe). These binary theta series were defined in terms of positive definite (binary) quadratic forms with determinant not divisible by p . In the present note he asserts that the remaining characters and irreducible representations can be found by considering binary theta series defined in terms of positive definite (binary) quadratic forms whose determinant is divisible by p . Details of this investigation are to be published elsewhere. *P. T. Bateman.*

Barbilian, D.: Sur les groupes sans torsion de A. I. Maltsev. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. **3**, 475—494 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 494—495, 495—497 (1952) [Rumänisch].

Dans ses travaux sur les groupes nilpotents de Lie (ce Zbl. **34**, 17), A. I. Mal'cev donne sans démonstration le théorème: Tout groupe G nilpotent, abstrait, est à radical périodique. En reconstituant la démonstration de ce théorème, l'A. s'est posé le problème: Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes requises par l'existence du radical périodique dans un groupe abstrait. — On désignera du nom de système commutateur K un ensemble non vide d'éléments du groupe, fermé par rapport à l'opération $a \circ b = a^{-1} b^{-1} a b$. Tout système commutateur est le premier terme d'une chaîne déclinante bien déterminée $K = K^0 \quad K^1 \quad K^2 \quad \dots$, où K^i ($i > 0$) signifie l'ensemble de tous les éléments de K^0 qui peuvent être mis sous forme de commutateur itéré de dimension $d \geq i$, c'est-à-dire d'un agrégé de $d \geq i$ opérations $a \circ b$, poursuivies arbitrairement à droite ou à gauche, en partant des éléments de K^0 . — À l'aide de cette notion, on donne deux généralisations de la nilpotence ordinaire, irréductibles l'une à l'autre. Soit PX resp. $P(X)$ l'ensemble de tous les éléments périodiques contenus dans le complexe X , resp. dans le sous-groupe $\langle X \rangle$ engendré par X . Le groupe G est dit périodiquement nilpotent de première resp. de seconde espèce, s'il existe un système commutateur K générateur de G , à chaîne déclinante épuisée ($K^\omega = 1$) dont tous les sous-groupes $\langle PK^i \rangle$ resp. tous les complexes $P(K^i)$ sont invariants en G (par rapport aux automorphismes intérieurs). — On établit par induction, relativement à la longueur ω de la chaîne déclinante, les théorèmes: I. Un groupe G périodiquement nilpotent de première, resp. de seconde espèce, par l'intermédiaire d'un système commutateur périodiquement permis: $G = \langle K \rangle$, $P(K) \subset \langle PK \rangle$ est à radical périodique. II. Un groupe G engendré par un système commutateur K périodiquement permis, à chaîne déclinante de première resp. de seconde espèce [c'est-à-dire: une chaîne aux groupes $\langle PK^i \rangle$ resp. aux complexes $P(K^i)$ invariants] admet un radical périodique, si l'un des chaînons K^ω appartient à un sous-groupe invariant périodique. — On peut même donner au théorème ci-dessus le caractère d'un critérium, un peu formel, nécessaire et suffisant. *Autoreferat.*

Wallace, A. D.: A note on mobs. Anais Acad. Brasil. Ci. **24**, 329—334 (1952).

A semigroup is an algebraic system S having one operation, written as xy , which is associative. A semigroup in which is a Hausdorff space and in which multiplication is a continuous function of both variables is called by the author a mob. The major theorems proved are the following. I. Let S be a mob and let A be a subset of S which is a group. If the closure A^- of A in S is compact, then A^- is a topological subgroup of S . II. Let S be a compact mob with unit, and let I be the set of elements of S having two-sided inverses. Then I is a compact topological subgroup of S . III. Let S be a connected mob with unit and let I be compact. Then no element of I cuts I in S . (Given a topological space X and subsets P, Q of X , P is said to cut Q in S if $X - P = U \cup V$, where $U \cap V^- = 0 = U^- \cap V$, and $Q \cap U \neq 0 \neq Q \cap V$.) IV. Every compact mob contains a minimal closed ideal (a subset A of a semigroup S is called an ideal if $a \in A$ and $s \in S$ imply that sa and as are in A .) V. A minimal closed ideal of a connected mob is connected. VI. A compact mob contains an idempotent element. *E. Hewitt.*

Montgomery, Deane: Properties of finite-dimensional groups. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 442—446 (1952).

The author's object is to present a brief sketch of recent investigations concerning the properties of finite-dimensional groups. Let G be a topological group and M a topological space,

and the function $f(g; x) = g(x)$ ($(g, x) \in G \times M$) with values in M be a transformation group, so that $x \rightarrow g(x)$ is a homeomorphism of M onto itself and $g_1[g_2(x)] = (g_1 g_2)(x)$. If $g(x) = x$ for all $x \in M$ implies that g is the identity, then we call the transformation group to be effective. The author first states the at that time unsolved problem of Hilbert. The following conjecture belongs also to Hilbert's type: If G is compact and acts effectively on a manifold M , does this imply that G is a manifold and hence by a wellknown result of von Neumann, a Lie group? This is indeed true if $M = E^n$. Further if M is an n -dimensional manifold and G is compact, effective, and has locally connected orbits, then G must be a Lie group. — If G is n -dimensional and H is a closed subgroup, then $\dim G \leq \dim H + \dim G/H$. The probable relation $\dim G = \dim H + \dim G/H$ is not yet proved completely. For every locally compact connected n -dimensional group G there exists a connected locally compact n -dimensional group L , whose image $h(L)$ by a continuous one to one homomorphism h is dense in G . This result reduces some questions about topological groups to the locally connected case. The following two theorems are of Hilbert's type: A. Let G be a locally compact connected n -dimensional group, $n > 0$, which is not compact. Then G contains a closed subgroup isomorphic to the real numbers. B. Let G be a locally compact, connected, n -dimensional group, $n > 1$, which is not compact. Then G contains a closed connected two-dimensional subgroup which is not compact.

T. Tannaka.

Iwasawa, Kenkichi: Some properties of (L) -groups. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 447—450 (1952).

The author's object lies in presenting a sketch of recent investigations concerning (L) -groups, one of his aims is seemingly to attack the at that time unsolved fifth problem of Hilbert. In this note the author defines (L) -groups as the locally compact groups which are projective limits of Lie groups, and this definition is a slight modification from his previous one (K. Iwasawa, this Zbl. **34**, 18). It follows that subgroups and factor groups of (L) -groups are also (L) -groups. If G is connected and locally compact, N its closed normal subgroup, and if N and G/N are (L) -groups then G itself is an (L) -group. Secondly we have the following characterization of connected (L) -groups: a connected locally compact group G is an (L) -group if and only if G is locally the direct product of a local Lie group L and a compact normal subgroup K . From this follows for instance that every locally Euclidean solvable group is a Lie group. Every connected (L) -group is decomposed in the form $G = H_1 \cdots H_r K$, where H_i are subgroups which are all isomorphic to the additive group of real numbers and K a maximal compact subgroup of G . A. Borel (this Zbl. **36**, 156) and Y. Matsushima [J. math. Soc. Japan **1**, Nr. 4, 264—274 (1950)] obtained the generalization of E. E. Levi's decomposition theorem for connected (L) -groups. Lastly the author states the following (equivalent) conjectures: (C_1) Any connected locally compact group is an (L) -group. (C_2) A connected locally compact group which contains no arbitrary small normal subgroup is a Lie group, and (C_3) A connected locally compact simple group is a simple Lie group.

T. Tannaka.

Verbände. Ringe. Körper:

Birkhoff, Garrett: Some problems of lattice theory. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 4—7 (1952).

Zusammenstellung offener Probleme der Verbandstheorie. An Hand der Liste ungelöster Fragen aus dem Lehrbuch des Verf. über Verbandstheorie wird ein Überblick über die inzwischen beantworteten Problemstellungen und über die verbleibenden offenen Fragestellungen gegeben. Die wichtigsten unter ihnen werden gesondert diskutiert, und weiter wird in diesem Zusammenhang ein Ausblick auf die vermutliche Weiterentwicklung der Theorie gegeben.

H.-J. Kowalsky.

● **Maeda, F.: Kontinuierliche Geometrie.** Tokyo: Iwanami Shoten 1952. II, III, 225 p. Yen 600 [Japanisch].

This book contains nearly all the important facts which are known today about J. von Neumann's continuous geometries. Proofs are complete and may be followed by any beginner of mathematics who can read Japanese. First three chapters (1. Fundamental concepts about lattices; 2. General properties of modular lattices; 3. Projective spaces) — nearly one third of the volume — are devoted to introduction into the algebraic theory of lattices with some special consideration about complete lattices in which the operations are continuous. The continuity of operations is formulated in terms of directed sets; the equivalence of this formulation with J. von Neumann's and with another more algebraic one is proved in the appendix of the book, in which also the equivalence between the axiom of choice, the well-ordering theorem and Zorn's lemma is shown by one of the well-known methods. The cumbersome transfinite induction, which was used repeatedly by J. von Neumann, is, in this book, replaced by Zorn's lemma. The subse-

quent two short chapters exhibit the theory of dimension and sub-direct decomposition of a continuous geometry for the case where no group of automorphisms is considered — only I. Halperin's and F. Maeda's generalizations are indicated in a foot-note —; von Neumann's fundamental theorems are proved in chap. 4, and T. Iwamura's theorems are proved in chap. 5 by Y. Kawada-K. Higuti-Y. Matusima's method. The continuity of perspectivity, which was first proved directly by Halperin, is proved here indirectly. Chap. 6 gives the definition and fundamental properties of the regular ring. Chap. 7 shows Maeda's theory of dimension and sub-direct decomposition of regular rings, which corresponds the results of chap. 5. The subsequent four chapters (8. Normalized frame; 9. Matrix ring; 10. Auxiliary ring; 11. Representation) are devoted to von Neumann's representation theory of complemented modular lattice of degree ≥ 4 , the proof of which is much simplified according to K. Kodaira-S. Furuya's method. Chap. 12 (the last chapter of the book) deals with ortho-complemented modular lattice (not necessarily finite dimensional) and ends in Maeda's generalization of G. Birkhoff-von Neumann's representation theorem for such lattices.

T. Iwamura.

Maeda, Fumitomo: Matroid lattices of infinite length. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 15, 177—182 (1952).

Die von G. Birkhoff in Lattice theory (rev., ed. New York 1948, dies. Zbl. 33, 101) gegebene Charakterisierung der endlichen matroiden Verbände wird für Verbände unendlicher Länge nachgewiesen.

F. W. Levi.

Sasaki, Usa and Shigeru Fujiwara: The decomposition of matroid lattices. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 15, 183—188 (1952).

Jeder matroide Verband ist die direkte Summe irreduzibeler matroider Verbände. In diesen wiederum sind je zwei Punkte perspektiv zueinander.

F. W. Levi.

Sasaki, Usa and Shigeru Fujiwara: The characterization of partition lattices. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 15, 189—201 (1952).

O. Ore hat im 4. Kapitel seiner „Theory of equivalence relations“ [Duke math. J. 9, 513—627 (1942)] eine Geometrie eingeführt, die isomorph ist zu dem aus allen Zerlegungen einer Menge in disjunkte Teilmengen bestehenden Verbände. Die Verf. zeigen, daß die direkten Summen derartiger Verbände genau den Geometrien entsprechen, die man erhält, wenn man das fünfte (letzte) Axiom von Ore wegläßt.

F. W. Levi.

Tanaka, Toshio: Canonical subdirect factorizations of lattices. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 239—246 (1952).

Ein Verband L heißt „subdirektes Produkt“ von Verbänden L_α , wenn zu jedem α ein Homomorphismus $L \rightarrow L_\alpha$ von L auf L_α gegeben ist derart, daß zwei verschiedene Elemente $a \neq b$ aus L mindestens für ein α verschiedene Komponenten $a_\alpha \neq b_\alpha$ besitzen (S. 91 in Birkhoff's „Lattice theory“, rev. ed., New York 1948, dies. Zbl. 33, 101, zitiert mit B). Ist θ_α die zu dem Homomorphismus $L \rightarrow L_\alpha$ gehörige Kongruenzrelation von L , so kann die letztere Bedingung auch in der Form $\bigwedge \theta_\alpha = 0$ ausgesprochen werden, wo \bigwedge die Durchschnittsbildung im Verband $\Theta(L)$ aller Kongruenzrelationen in L bedeutet (B S. 92). Ist jedes θ_α maximal in dem Sinne, daß für $\theta_\alpha < \theta'$ gilt: $\theta' \cap \bigwedge_{\beta \neq \alpha} \theta_\beta \neq 0$, dann heißt die vorgegebene subdirekte

Zerlegung von L „kanonisch“ (Maeda, dies. Zbl. 45, 160). Verf. zeigt: L besitzt genau dann eine kanonische subdirekte Zerlegung in subdirekt irreduzible Faktoren, wenn $\Theta(L)$ ein atomarer Verband ist, d. h. [nach Maeda, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 15, 87—96, p. 88 (1951)] wenn jedes θ aus $\Theta(L)$ ein Atom von $\Theta(L)$ enthält. Ferner löst Verf. das Birkhoffsche Problem 72 (B S. 153) folgendermaßen: $\Theta(L)$ ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn L eine subdirekte Zerlegung in einfache Faktoren L_α besitzt derart, daß für irgend zwei Elemente a, b aus L die Ungleichung $a_\alpha \neq b_\alpha$ höchstens für endlich viele α gilt. Dabei heißt L_α einfach, wenn $\Theta(L_\alpha)$ höchstens zwei Elemente besitzt.

P. Roquette.

Löwig, Henry F. J.: On the properties of freely generated algebras. J. reine angew. Math. 190, 65—74 (1952).

A sei eine feste Menge. Unter einer T -Folge werde eine Familie $x = (x_t)_{t \in T}$ von Elementen $x_t \in A$, d. h. eine eindeutige Abbildung von T in A verstanden. Eine T -Operation f ordnet jeder T -Folge x das f -Produkt $fx \in A$ zu, ist also eine eindeutige Abbildung der Menge A^T aller T -Folgen in A . Durch Vorgabe einer Familie $(f_i)_{i \in I}$ von T_i -Operationen f_i wird nach Verf. die Menge A zur Algebra. Dieser Algebrabegriff deckt sich ungefähr mit dem von Birkhoff 1935 (dies. Zbl. 13, 1), den Birkhoff selbst inzwischen zugunsten des heute allgemein üblichen aufgegeben hat, wohl nicht zuletzt aus den bei Birkhoff-Frink (dies. Zbl. 32, 5), Buchi (dies. Zbl. 48, 22) und in den Arbeiten des Ref. [Math. Nachr. 7, 165—182 (1952), Ber. Math. Tagung Berlin 1953, 21—48 (1953)] zutage tretenden Gründen. Heute verlangt man Endlichkeit der Operationen

(der Bereiche T_i); siehe Birkhoff, *Lattice Theory*, 2. Aufl., New York 1948, foreword on algebra (dies. Zbl. 33, 101), Bourbaki, *Structures Algébriques*, Paris 1942, u. a. — Gegenstand der Note ist eine Definition der „freien Algebra“ (freely generated algebra), „which avoids the logical difficulties connected with definition 2 of Birkhoff, loc. cit.“. Ein zitierter Stelle gibt Birkhoff, um zum Begriff der freien Algebra zu gelangen, eine Definition des „Gesetzes“, der in der Tat kaum mathematischer, allenfalls metamathematischer Charakter zuerkannt werden kann. Den Begriff des Gesetzes glaubt Verf. auf folgendem Wege vermeidbar machen zu können: mit CM werde die von der Teilmenge M der Algebra A (mit den Operationen f_i) erzeugte Unter algebra bezeichnet; alsdann heiße M eine „freie Teilmenge von A “, sofern gilt: 1. ist x eine (passende) Folge aus CM , so ist $f_i x \in M$; 2. sind x und y (passende) Folgen aus CM mit $f_i x = f_k y$, so ist $i = k$ und $x = y$. Eine „frei erzeugte Algebra“ soll nun eine Algebra A sein, die eine freie Erzeugende M besitzt. — Leider trifft diese Definition in gar keiner Weise das, was man gemeinhin unter einer freien Algebra versteht. So verstößt z. B. wegen des idempotenten Charakters der Verbandsoperationen jede nichtleere Teilmenge M eines Verbandes A schon gegen die 1. Bedingung (die sonst im wesentlichen nur die Unabhängigkeit von M im Sinne des Hüllenoperators C sichert); es gibt also keinen „frei erzeugten Verband“. Ebenso kann es keine „frei erzeugte Halbgruppe“ geben, da die Assoziativität stets die Verletzung der 2. Forderung zur Folge hat. Es ist Verf. also nicht gelungen, den Begriff des „Gesetzes“ vermeidbar zu machen; nach Ansicht des Ref. ist dies überhaupt unmöglich. Die Lektüre der Note wird außerordentlich durch eine überladene, überdies von allem Üblichen abweichende Symbolik erschwert; Ref. hat die besprochenen Punkte schon in Normalsprache übersetzt. Jürgen Schmidt.

● Bourbaki, N.: *Éléments de mathématique*. XIV. 1^{ère} part.: *Les structures fondamentales de l'analyse*. Livre II: *Algèbre*. Chap. VI: *Groupe et corps ordonnés*. Chap. VII: *Modules sur les anneaux principaux*. (Actual. sci. industr. 1179.) Paris: Herman & Cie. 1952. 159 p.

VI, § 1 entwickelt die Theorie der geordneten abelschen Gruppen, und zwar grundsätzlich in additiver Schreibweise, wenn auch die multiplikative, vor allem bei der Begründung der Teilbarkeitstheorie, gebührend berücksichtigt wird. Eine Hauptrolle spielen die Begriffe „obere“ und „untere Grenze“ [$\sup(x, y)$ bzw. $\inf(x, y)$] und die Untersuchung der „Netzgruppen“, (groupes réticulés), bei denen $\inf(x, y)$ und damit auch $\sup(x, y)$ für jedes Elementpaar (x, y) existiert. Zwei nicht negative Elemente x, y heißen fremd, wenn $(x, y) = 0$; ein positives x wird extrem genannt, wenn kein positives $y < x$ existiert. (In der multiplikativen Teilbarkeitstheorie ist also „fremd = teilerfremd“, „extrem = teilerlos“.) Als Hauptresultat des Textteils in VI, § 1 kann in gewissem Sinne der Satz angesehen werden: Eine geordnete Netzgruppe ist dann und nur dann die direkte Summe von endlich vielen, zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen isomorphen Untergruppen, wenn jede Menge von positiven Elementen ein extremes enthält. Daß dieses Resultat leicht auch dann gewonnen werden kann, wenn man von einer geordneten Gruppe ausgeht, bei der nicht von vornherein die Kommutativität der Verknüpfungsoperation vorausgesetzt wird, ist in Aufgabe 1 kurz skizziert. Im übrigen seien bei den Aufgaben von VI, § 1 die folgenden Gruppen hervorgehoben: 13–17. Elementare Sätze über Halbgruppen, die praktisch wichtig für die multiplikative Halbgruppe der ganzen Ideale eines Ringes. — 19–21. Die geordnete Gruppe G ist dann und nur dann in eine Netzgruppe als Untergruppe einbettbar, wenn aus $n \cdot x \geq 0$ stets $x \geq 0$ folgt. — 24., 25. Dedekindsche Modulrelationen und simultane Lösbarkeit von Kongruenzensystemen in kommutativen Ringen. — 30.–35. Kalkül der Majoranten und Minorantenmengen in einer geordneten Gruppe; archimedisch geordnete, insbesondere archimedisch streng geordnete Gruppen; halbarchimedische Gruppen. (Verschiedene interessante Beispiele!) — VI, § 2 behandelt in sehr elegantem und straffem Aufbau die Theorie der geordneten und der formalreellen Körper im Sinne von Artin-Schreier. Von den Aufgaben seien erwähnt: 10a). (Größter reeller Unterkörper einer Galoisschen Erweiterung eines formal-reellen Körpers. — 11., 15., 17a). Ein archimedisch geordneter Körper ist zu einem und nur einem Unterkörper des Körpers der reellen Zahlen isomorph. — 17b), c). Über einem archimedisch geordneten Körper K existieren u. U. Polynome, die überall auf K positiv sind, aber über einem geordneten Oberkörper von K Nullstellen besitzen. — 22. Körper, über denen der zugehörige algebraisch abgeschlossene Körper einen endlichen Grad besitzt. (Wichtigste Beweisgedanken allerdings in V und nicht in VI, § 2 zu suchen, was vielleicht noch deutlicher hätte hervorgehoben werden können.) — 23. Bemerkungen über geordnete, nicht kommutative Körper. — VII, § 1 behandelt im Textteil die Teilbarkeitstheorie der nullteilerfreien Hauptidealringe; die Hauptidealringe mit Nullteilern werden in den Aufgaben 5 und 6 betrachtet. Im übrigen machen die Aufgaben den Leser vor allem mit einigen Sätzen aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper und der Verteilung der Primzahlen bekannt: 7.–12. Einheiten und euklidischer Algorithmus, insbesondere in quadratischen Zahlkörpern; 13.–20. Primzahlsätze, Gaußsche Primzahlen, Formeln für die Primzahlverteilung; 21.–27. Spezielle ganze Zahlen, insbesondere Binomialkoeffizienten. Im ganzen gesehen scheint dem Ref. das gesunde Gleichgewicht zwischen Textteil und Aufgaben hier nicht gewahrt zu sein. Vor allem kann man es beanstanden, daß gerade bei den interessantesten Aufgaben die Ausführungen des Textteils

für die Beweise beinahe gar nichts beitragen. — Im Textteil von § 2 wird ohne jede Endlichkeitsvoraussetzung die Zerlegbarkeit eines Torsionsmoduls in primäre Komponenten gezeigt. („Modul“, soweit nicht anderes ausdrücklich bemerkt, immer so viel wie „Modul über einem nullteilerfreien Hauptidealring.“) Als Anwendung folgt die Partialbruchzerlegung bei ganzen Zahlen und Polynomen in einer Unbestimmten, sowie die Diskussion der multiplikativen Restklassengruppe der ganzen Zahlen modulo m . Die Aufgaben behandeln zunächst Sätze wie den, daß jeder Divisionsuntermodul eines Moduls M direkter Summand von M ist, oder den, daß jeder ordnungsbeschränkte Modul M zyklisch direkt zerlegt werden kann. [3. bzw. 4.; in 4. wird dabei der wichtige Begriff des „fast unabhängigen“ (pseudolibre) Elementsystems aus M definiert.] Weiter führen die Aufgaben über gewisse, auf Prüfer zurückgehende Sätze (etwa 8.) bis zu einer interessanten Beweisskizze des Ulm-Zippin'schen Hauptsatzes für abelsche Torsionsgruppen, gleich ausgedehnt auf Moduln mit abzählbar unendlich vielen Erzeugenden. Der Leser wird allerdings die von Bourbaki gegebene Analyse des Systems der Grundgedanken am besten genießen, wenn er für die Einzelheiten gleich auf die 1952 in der „Summa Brasiliensis“ erschienene, bei Bourbaki als Manuskript zitierte Originalarbeit von G. W. Mackey und J. Kaplansky zurückgreift. — Der sehr kurze § 3 bringt im wesentlichen den Satz, daß jeder Untermodul eines freien Moduls selbst frei ist. Aufgabe 4 setzt an Stelle des Wortes „freier Modul“ allgemeiner „direkte Summe von eingliedrigen Moduln“. (Beim Beweis der Aufgabe Rückgriff auf Aufgabe 12 von § 2 nötig.) Aufgabe 8 und 10 bringen interessante Gegenbeispiele. — § 4 behandelt in der der praktischen Wichtigkeit des Gegenstandes angemessenen Ausführlichkeit die Theorie der endlichen Moduln, d. h. der Moduln mit endlich vielen Erzeugenden. (Normalform, invariante Faktoren, direkte Zerlegung, Matrizen über Hauptidealringen, endliche abelsche Gruppen, unzerlegbare Moduln, Elementarteiler und ihre Berechnung.) § 5 vollzieht dann in geläufiger Weise den Übergang zur Ähnlichkeitstheorie der Matrizen, indem einem Vektorraum R von endlichem Rang über dem kommutativen Körper K mit ausgezeichnetem Endomorphismus u ein Modul M über dem Polynomring $K[x]$ zugeordnet wird. Natürlich wird der Fall eines algebraisch abgeschlossenen K besonders ausführlich betrachtet. (Jordansche Normalform; Eigenvektoren und Eigenwerte; Minimalpolynom; notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ähnlichkeitstransformation einer Matrix auf Diagonalform; Eigenschaften des charakteristischen Polynoms, Spur und Determinante; Berechnung des charakteristischen Polynoms des tensoriellen Produktes zweier Endomorphismen.) Zum Schluß werden die gewonnenen Ergebnisse benutzt, um die in V, § 10 nur für endliche Körper bewiesene Existenz der Normalbasis einer Galoisschen Erweiterung allgemein zu sichern. (Dabei wegen der speziellen Natur der endlichen Körper Beschränkung auf zyklische Erweiterungen möglich.) Ein Anhang zeigt vor allem, wie über beliebigen kommutativen Ringen mit Einheitselement der Begriff der Ähnlichkeit der Endomorphismen u, u' zweier gleichen oder verschiedenen Moduln E, E' eingeführt werden kann. — Von den zahlreichen und anregenden Aufgaben zu § 4 und § 5 seien der Kürze halber nur verhältnismäßig wenige hervorgehoben: § 4: 13. Dualitätstheorie eines endlichen Torsionsmoduls, und damit der endlichen abelschen Gruppen. — 16. Im Sinne der Endomorphismentheorie charakteristische Untermoduln eines endlichen Torsionsmoduls. — 18., 19. Lineare inhomogene Gleichungs- bzw. Kongruenzsysteme über Hauptidealringen. — 21. Halbdiaagonalform von quadratischen Matrizen über Hauptidealringen. — 23. Endliche und nicht endliche Moduln M endlichen Ranges, insbesondere notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß M vom Range r . — § 5 („Matrizen“ ohne weiteren Zusatz quadratische Matrizen über einem kommutativen Körper K): 5. Simultane Ähnlichkeitstransformationsnormalform für endlich viele, paarweise vertauschbare Matrizen. — 9. Lineares Kongruenzsystem in $K[x]$ als notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit einer Matrixgleichung $XA = BX + C$ (falls A, B von verschiedenen Graden, C rechteckig). — 16. A dann und nur dann ähnlich zu A^{-1} , wenn $A = BC$, wobei $B^{-1} = B, C^{-1} = C$. — 17. Matrixensysteme A_1, \dots, A_s mit $A_i = A_i^{-1}, A_i A_j = -A_j A_i$ ($i \neq j$). Existenz und Anzahl der nicht ähnlichen Lösungssysteme in Abhängigkeit von der Gradzahl n der A_i . Keine Hinweise auf die Bedeutung der Systeme für die Gruppentheorie und Geometrie. — 20. Ausgehend von der Bemerkung, daß bei einem endlichen Vektorraum E über K (auch bei nicht kommutativem K) zu jedem Endomorphismus u eine direkte Zerlegung $E = E_1 + E_2$ existiert, derart, daß $E_2 \cdot u^r = (0)$ für großes r und E_1 durch u auf sich abgebildet wird, wird — leider zu knapp — die Möglichkeit einer neuen Begründung der Ähnlichkeitstheorie der Matrizen für kommutatives K angedeutet. Es kommt wohl letzten Endes auf den Satz heraus, daß A dann und nur dann ähnlich zu B , wenn $p(A)$ und $p(B)$ vom gleichen Rang für jedes $p(x) \in K[x]$. — Anhang: 4. Menge der Matrizen X , für die $XA = BX$, falls A, B von gleichem Grad. — Den Schluß des vorliegenden Bandes bildet eine sehr anregende historische Übersicht über die Entwicklung der in VI und VII behandelten Theorien. Behandelt wird: 1. die Entwicklung der Teilbarkeitslehre der ganzen Zahlen von Euklid und den Griechen über die Inder bis zu Euler, Gauß, Kummer. 2. Endliche abelsche Gruppen und Ähnlichkeitstransformationen von Matrizen von Gauß bis Sylvester, Cayley, Weierstrass. 3. Problem des „Gaußschen Fundamentalsatzes“ und der reellen Körper (abgesehen von der Behandlung des durch Artin-Schreier in der neuesten Zeit erzielten Fortschritts ausgezeichnete Würdigung der spezifischen Leistungen von Euler, Lagrange, Gauß). W. Krull.

● **Johnson, R. E.:** First course in abstract algebra. New York: Prentice-Hall Inc. 1952. 281 p.

Almeida Costa, A.: Über die Geschichte der multiplikativen assoziativen Bereiche. Asoc. Española Progreso Ci., XXI. Congr. Malaga, 9.—15. Dic. 1951, 67—109 (1952) [Portugiesisch].

Exposé historique de la théorie des structures algébriques à multiplication associative. C'est un domaine auquel l'A. a consacré de nombreux travaux. Voici les points principaux considérés: Groupes. Corps commutatifs. Algèbres. Systèmes modulaires. Anneaux commutatifs. Anneaux (associatifs) non commutatifs. Une extense et soignée bibliographie termine l'exposé. *G. Ancochea.*

Almeida Costa, A.: Über die unterdirekten Modulsummen. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 115—160 (1952).

L'A. considère, dans une exposition claire et assez complète, des propriétés des modules concernant la somme sousdirecte. L'indice des questions traitées donne une idée précise du contenu de l'article: Einführung. Definition. Unterdirekte Summen. Spezielle unterdirekte Summen. Diskrete direkte Summen. Unterdirekt irreduzible Moduln. Über das J -Radikal (Jakobson). Halbeinfache Moduln. Über unendliche Moduln in bezug auf Divisionsringe. Untermodul D (Brown, McCoy). Über die unterdirekt irreduziblen Ringe. *G. Ancochea.*

Jacobson, N.: Representation theory for Jordan rings. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 37—43 (1952).

The paper contains a summary of the results which were published previously (this Zbl. 39, 264; 44, 25). *L. K. Hua.*

Mori, Shinjiro: Struktur der Multiplikationsringe. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 1—11 (1952).

Ein kommutativer Ring \mathfrak{R} heißt Multiplikationsring, wenn zu zwei Idealen a, b aus \mathfrak{R} mit $a \subset b$ stets ein Ideal c mit $a = b \cdot c$ vorhanden ist. Hauptergebnis: Ein Multiplikationsring \mathfrak{R} , in dem jedes Idempotent direkte Summe endlich vieler primitiver Idempotente ist, ist im Falle $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$ direkte Summe von möglicherweise unendlich vielen Ringen, in denen jedes Ideal $\neq (0)$ eindeutig als Produkt von endlich vielen Primidealen dargestellt werden kann, während im Falle $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{R}^2$ jedes Ideal $\neq (0)$ aus \mathfrak{R} eine Potenz von \mathfrak{R} ist. Daraus folgt insbesondere, daß in dem kommutativen Ring \mathfrak{R} genau dann jedes Ideal $\neq (0)$ Produkt von endlich vielen Primidealen ist, wenn \mathfrak{R} Multiplikationsring ist und in \mathfrak{R} der Teilerkettensatz gilt. *G. Pickert.*

Szele, Tibor: Ein Zerfällungssatz für radikalfreie Ringe. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 432—434, ungarisch 429—431, russische Zusammenfassg. 431 (1952).

Es wird bewiesen: Ist R ein radikalfreier Ring, L Linksideal von R und enthält L als Ring eine Linkseins e , so ist L zweiseitiges Ideal von R und es besteht mit einem weiteren zweiseitigen Ideal L' von R die direkte Summe $R = L + L'$. Dazu betrachte man die Lösungen x aus L von $x \cdot e = 0$. Sie bilden ein nilpotentes Linksideal M von R , also ist $M = 0$. Aus $(y \cdot e - y) \cdot e = 0$ folgt dann, daß e zweiseitige Eins in L ist. Daher enthält jede Restklasse von R modulo L genau ein Element des Linksideals L' der Lösungen x aus R von $x \cdot e = 0$; also besteht die angegebene direkte Zerlegung. Aus $L' \cdot L = L' \cdot (e \cdot L) = 0$ sowie $(e \cdot L')^2 = 0$, $e \cdot L' = 0$ und $LL' = (L \cdot e) \cdot L' = 0$ folgt die Zweiseitigkeit der Ideale L, L' . — Vgl. die Arbeit L. Fuchs und T. Szele, dies. Zbl. 48, 263. *W. Gaschütz.*

Fuchs, László: On a new type of radical. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 435—441, russische und engl. Zusammenfassgn. 443 (1952) [Ungarisch].

Für die Ringe mit Minimalbedingung ist der klassische Radikalbegriff von Wedderburn bekanntlich sehr geeignet. Zur Gewinnung von allgemeineren Struktursätzen wurden mehrere neue Radikalbegriffe definiert, die aber bisher nicht zum erwünschten Erfolg geführt haben. Auch das auf Gelfand und Perlis zurückgehende Radikal von Jacobson ist nicht in jeder Hinsicht befriedigend, denn wohl gilt ein allgemeiner Struktursatz für die Ringe, in denen dieses

Radikal 0 ist, aber zu den Ausnahmen gehört unter anderen auch der (nullteilerfreie!) Ring der rationalen Zahlen mit ungeradem Nenner, dessen Jacobsonisches Radikal nämlich $\neq 0$ ist. Verf. versucht ein anderes Radikal zu definieren, das möglicherweise die Vorteile des Jacobsonischen Radikals hat und dabei nur Nullteiler enthält. Er nennt eine Teilmenge M eines Ringes R (von rechts) annullierbar, wenn es ein Element $c (\neq 0, \in R)$ mit $Mc = 0$ gibt. Insbesondere heißen die annullierbaren Elemente die Linksnulleiler von R . Man betrachte diejenigen $a (\in R)$, für die das Hauptideal (a) aus lauter Linksnulleilern besteht. Ein Element $z (\in R)$ wird ein Zeroidement genannt, wenn für die betrachteten a alle $z + a$ Linksnulleiler sind. Ein Ideal heißt ein Zeroidideal, wenn es aus lauter Zeroidementen besteht. Dann definiert Verf. das Radikal Z von R als die Summe aller Zeroidideale. Das Radikal ist selbst ein Zeroidideal. Ein Ideal nennt er Z -maximal, wenn es aus Linksnulleilern besteht und sich ohne Verletzung dieser Eigenschaft nicht erweitern läßt. Aus dem Lemma von Zorn folgt, daß der Durchschnitt aller Z -maximalen Ideale gleich Z ist. Die Z -maximalen Ideale selbst sind Primideale (d. h. enthalten ein Idealprodukt nur dann, wenn ein Faktor zu ihnen gehört). Dann gilt der Struktursatz: Der Faktoring R/Z ist die subdirekte Summe von Ringen, die kein von 0 verschiedenes annullierbares Ideal enthalten. Die Definition von Z ist nicht (links-rechts-)symmetrisch, aber es steht noch aus, ob Z trotzdem symmetrisch ist. Das ist der Fall, wenn R das Einselement hat und für die Ideale die Minimalbedingung erfüllt ist, denn dann ist Z gleich der Summe der nilpotenten Ideale. Als unentschiedenes Problem bleibt auch übrig, ob R/Z radikalfrei ist. Verf. gedenkt, auf die erwähnten und die anderen offen gebliebenen Probleme zurückzukommen.

L. Rédei.

Rédei, L.: Vollidealring im weiteren Sinn. I. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **3**, 243—268 (1952).

A ring R is called a „Vollidealring“ in wider sense if every subring of R is a two-sided ideal of R . In this paper the author determines completely all the possible structures of Vollidealringe which are generated by one element. Let I be the ring of integers. Then such a ring is isomorphic to one of the following types: (I) $xI[x]/x(x-a)\prod_p \mathfrak{P}$, (II) $xI[x]/x\prod \mathfrak{P}$ where the product \prod_p in (I) runs over a finite number of primes p which divides a . Also the prime ideal \mathfrak{P} of $I[x]$ in (I) is of the type $(x(x-b), p)$ or $(x-b, p)$ where p does not divide b , and \mathfrak{P} in (II) is one of the following types: (i) $(x(x-a)(x-b), p(x-a), p^n)$ ($p \nmid a, p \nmid b, n \geq 2$), (ii) $((x-a)(x-b) + p^{n-1}bc, p(x-a), p^n)$ ($p \nmid a, n \geq 2$), (iii) $(x-a, p^n)$ ($n \geq 1$), (iv) $(x^2(x-a), p)$ ($p \nmid a$), (v) $(x(x-a), p)$ of $I[x]$. As a corollary: every element of R is algebraic of degree ≤ 3 . The theorem is proved by step by step reductions.

Y. Kawada.

Nakayama, Tadasu: Note on double-modules over arbitrary rings. Amer. J. Math. **74**, 645—655 (1952).

Anschließend an seine Entwicklung einer Galoisschen Theorie für nichthalbeinfache Ringe (dies. Zbl. **45**, 10) und anknüpfend an die Bemerkung, daß die modultheoretische Galoisstheorie Jacobsons von Hochschild zu einer Theorie der Doppelmoduln über Schiefkörpern erweitert wurde, die dann Dieudonné auf den unendlichdimensionalen Fall ausdehnte (Hochschild, dies. Zbl. **37**, 23; Dieudonné, dies. Zbl. **42**, 116), untersucht Verf. hier die Möglichkeiten einer Theorie von Doppelmoduln über beliebigen Ringen ohne jede Endlichkeitsbedingung. Von grundlegenden Bedeutung ist wie in der früheren Arbeit der Begriff des Relationenmoduls, der — wenn wir uns im Referat der Einfachheit halber nur mit A - A -Moduln (und nicht mit K -links-, A -rechts-Moduln) beschäftigen — folgendermaßen definiert wird: Es sei A ein beliebiger Ring mit Einheitselement, \mathfrak{A} der absolute Modul-Endomorphismenring von A . Weiter bedeute M einen A - A -Modul und M^* den Modul aller A -Homomorphismen von M in A . Dann ist für jedes $u_0 \in M$ und jedes $\sigma \in M^*$ durch die Gleichung $x \cdot \sigma = (u_0 x) \cdot \sigma$ ein bestimmtes $\sigma \in \mathfrak{A}$ festgelegt. Die Menge aller auf diese Weise bei festem u_0 und variierendem σ entstehenden σ bildet einen A - A -Untermodul von \mathfrak{A} , den Relationenmodul $R(M, u_0)$. Verf. stellt sich für seine Untersuchung zwei Hauptaufgaben: Eine Charakterisierung der Relationenmoduln und eine Charakterisierung der (Kroneckerschen) direkten Selbstprodukte. In der zweiten Richtung kommt man zu einer sehr befriedigenden Verallgemeinerung der in der Arbeit zur Galoisschen Theorie gewonnenen Resultate. Nennt man einen durch ein Element u_0 erzeugten A - A -Modul M speziell, wenn er eine unabhängige A -Basis von (im allgemeinen unendlich vielen) Elementen aus $u_0 \cdot A$ besitzt, so kommt man diesmal zu dem Hauptsatz: Ein spezieller A - A -Modul M ist dann und nur dann zu dem direkten A -Selbstprodukt $A \times_{sA} A$ von A über einem passenden Untertring S isomorph, wenn der Relationen-Modul $R(M, u_0)$ einen Ring bildet und aus $u_0 x = 0$ stets $x = 0$ folgt. (Vgl. hierzu den Schlußsatz des Referats Nakayama, dies. Zbl. **45**, 10). — Was die Charakterisierung der Relationenmoduln angeht, so erhält man zwar eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein A - A -Untermodul von \mathfrak{A} den Relationenmodul

eines speziellen A - A -Moduls darstellt. Aber diese Bedingung enthält eine sehr scharfe und im allgemeinen sicher nicht leicht zu verifizierende Existenzforderung, die, wie durch Beispiele gezeigt wird, sicher nicht ohne einschneidende Zusatzannahmen über die zugelassenen Ringe aus einfacheren, unmittelbar plausibeln Forderungen abgeleitet werden kann. Bei der Charakterisierung der Relationsmoduln scheint man also im allgemeinen Fall nicht auf elegante Sätze hoffen zu dürfen, ein Resultat, das im übrigen mit den in der Arbeit zur Galoisschen Theorie gewonnenen Ergebnissen durchaus im Einklang steht.

W. Krull.

Nakayama, Tadası: Galois theory of simple rings. Trans. Amer. math. Soc. 73, 276—292 (1952).

Verf. entwickelt die allgemeine Galoissche Theorie für einfache Ringe mit Minimalbedingung. Der Aufbau muß unabhängig von Hochschild durchgeführt werden, der bereits den Fall der einfachen Algebren behandelt hatte; denn bei Hochschild ist der endliche Rang der Algebra über ihrem Zentrum wesentlich, während hier keine derartige Endlichkeitsannahme gemacht wird. Den Ausgangspunkt bildet der Begriff „schwach normal“. Es sei A ein einfacher Ring mit Einheits-element, \mathfrak{A} der Endomorphismenring der additiven Gruppe A . Bei einem Unterring C von A bedeute C_l bzw. C_r den Unterring von \mathfrak{A} , den die Elemente von C bilden, wenn man sie als Links- bzw. Rechtsmultiplikatoren von A auffaßt. $V_{\mathfrak{A}}(C_r)$ sei wie üblich der Kommutatorring von C_r in \mathfrak{A} , der offenbar A_l umfaßt. Ein einfacher Unterring C von A wird nun schwach normal genannt, wenn $V_{\mathfrak{A}}(C_r)$ über A_l eine aus A_l -semilinearen Endomorphismen bestehende Basis besitzt. Es ergibt sich dann leicht der für alle weiteren Untersuchungen grundlegende Hilfssatz: Ist C ein schwach normaler Unterring von A , so ist A als A -Links-, C -Rechtsmodul vollständig reduzibel, und zwar die direkte Summe von minimalen Moduln, die untereinander A_l -semilinear, C_r -linear isomorph sind. Eine Reihe von Hilfssätzen, die im ersten Abschnitt der Arbeit aus dem Fundamentalhilfssatz abgeleitet werden, möge der Kürze halber unbesprochen bleiben. — Ist Φ eine Gruppe von (Ring-)Automorphismen von A , so bezeichnet Verf. mit T_Φ den Unterring von A , der von allen den regulären Elementen erzeugt wird, die zu Φ gehörige innere Automorphismen von A definieren. Φ wird komplett genannt, wenn Φ alle inneren Automorphismen enthält, die durch reguläre Elemente aus T_Φ definiert werden. Die komplette Gruppe Φ heißt regulär, wenn 1. T_Φ ein einfacher, über dem Zentrum Z von A endlicher Unterring von A ist und wenn darüberhinaus 2. die aus allen zu Φ gehörigen inneren Automorphismen bestehende, invariante Untergruppe Φ_0 von Φ in Φ einen endlichen Index besitzt; $(\Phi: \Phi_0) \cdot [T_\Phi: Z]$ wird als die reduzierte Ordnung von Φ bezeichnet. Die regulären Automorphismengruppen sind es, für die hier die Galoissche Theorie entwickelt wird. Von den gewonnenen Ergebnissen seien (in der Numerierung der Arbeit) die folgenden Sätze hervorgehoben: Satz 1. Es sei J der Invariantenring der regulären Automorphismengruppe Φ von A ; dann ist J ein einfacher Ring, und es hat A über J eine unabhängige Rechts-Basis von $(\Phi: \Phi_0) \cdot [T_\Phi: Z]$ Elementen. Φ ist die größte Automorphismengruppe von A , die J elementweis fest läßt. Der Kommutator $V_A(J)$ von J in A ist gleich T_Φ . — Satz 3. Es sei B ein einfacher Unterring, über dem A einen endlichen Rechtsrang hat. Ist dann $V_A(B)$ einfach, so ist die Gruppe Φ aller Automorphismen von A über B einfach. Dann und nur dann, wenn B schwach normal in A ist, fällt der Invariantenring J von Φ mit B zusammen. — Fast unmittelbar aus Satz 1 und Satz 3 folgt der erste Hauptsatz der Galoisschen Theorie: Satz 5. Es sei Φ eine reguläre Automorphismengruppe von A und J ihr Invariantenring. Dann besteht im üblichen Sinne der Galoisschen Theorie eine eindeutige duale Zuordnung zwischen den regulären Untergruppen von Φ und den einfachen Unterringen von A , die J enthalten und einfache Kommutatoren in A besitzen. — Weiter ergibt sich sofort aus einer der aus dem fundamentalen Hilfssatz gezogenen Folgerungen: Satz 6. Haben A , Φ , J die gleiche Bedeutung wie in Satz 5, und sind B , C einfache Ringe zwischen A und J mit einfachen Kommutatoren $V_A(B)$, $V_A(C)$, so läßt sich ein Isomorphismus β von B über J , der B in C überführt, stets zu einem (natürlich in Φ liegenden) Automorphismus von A über J fortsetzen. — Der den Hauptteil der Note abschließende Satz 7 gibt unter gewissen Zusatzforderungen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die größte Untergruppe A von Φ , die einen einfachen Ring B zwischen A und J mit einfachem $V_A(B)$ in sich überführt, gerade J als Invariantenring besitzt. — Der letzte Abschnitt der Arbeit bringt Ergänzungs-bemerkungen. Vor allem wird untersucht, welche Sätze gültig bleiben, wenn man „halbreguläre“ Gruppen Φ zuläßt, bei denen T_Φ nur halbeinfach zu sein braucht, und es wird gezeigt, daß die entwickelte Theorie unmittelbar auf den Fall eines „vollständigen primitiven“ Rings A übertragen werden kann.

W. Krull.

Jaffard, P.: Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind. Bull. Soc. math. France 80, 61—100 (1952).

Verf. will den Begriff des Dedekindschen Ringes (Noetherschen Fünf-Axiome-Ringes) möglichst weitgehend so verallgemeinern, daß man für die Ringideale eine ähnliche einfache Zerlegung erhält, wie im klassischen Fall. Zu diesem Zweck definiert er zunächst: Der Integritätsbereich O mit dem Quotientenkörper K soll Ring vom D. T. (Dedekindschen Typ) heißen, wenn jedes Ringideal a eine (notwendig eindeutige) kanonische Produktzerlegung $a = a_1 \cdots a_m$

besitzt, bei der jeder der Faktoren q_i nur in einem einzigen maximalen Primideal m_i von O enthalten ist [$m_i \neq m_k$ ($i \neq k$)]. Man erhält dann durch typische Überlegungen aus dem Gedankenkreis der allgemeinen Idealtheorie kommutativer Ringe: O ist dann und nur dann ein Ring vom D.T., wenn 1. der Durchschnitt unendlich vieler maximaler Primideale aus O stets gleich dem Nullideal ist, und gleichzeitig 2. jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ nur ein einziges maximales Primoberideal besitzt. — Natürlich braucht ein allgemeiner Ring vom D.T. keine ideal-multiplikativ einfache Struktur zu besitzen. (Es ist ja z. B. jeder Integritätsbereich mit nur einem maximalen Primideal m vom D.T.). Eine vom Standpunkt der multiplikativen Idealtheorie ausgezeichnete Ringklasse bilden erst die Multiplikationsringe vom D.T., bei denen für zwei endliche Ideale $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ aus $a \subseteq b$ stets die Gültigkeit einer Gleichung $a = b \cdot c$ folgt. — Aus der bewertungstheoretischen Charakterisierung der Multiplikationsringe ergibt sich hier der grundlegende Satz: Ein Multiplikationsring O ist dann und nur dann vom D.T., wenn 1. die Bewertungen B_τ , die den maximalen Primidealen m_τ von O umkehrbar eindeutig entsprechen, paarweise unabhängig sind, und wenn gleichzeitig 2. in O kein $a \neq 0$ existiert, das in unendlich vielen B_τ Nichteinheit ist. [Die Zuordnung zwischen B_τ und m_τ beruht einfach darauf, daß der zu m_τ gehörige Quotientenring O_{m_τ} mit dem zu B_τ gehörigen Bewertungsring \mathfrak{B}_τ identisch ist; die Bewertungen B_1 und B_2 mit den Wertgruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ werden unabhängig genannt, wenn zu beliebigen Elementen $\gamma_i \in \mathfrak{G}_i$ ($i = 1, 2$) in K stets ein a existiert, das in B_i gerade den Wert γ_i hat ($i = 1, 2$).] Aus dem Fundamentalsatz ergibt sich mühelos: Die Ideale q_τ aus dem Multiplikationsring O vom D.T., die das Ideal m_τ zum einzigen maximalen Primideal haben, entsprechen umkehrbar eindeutig den Idealen \tilde{q}_τ aus \mathfrak{B}_τ . Gibt man in endlich vielen \mathfrak{B}_{τ_i} ($i = 1, \dots, n$) die Ideale \tilde{q}_{τ_i} beliebig vor, so existiert in O stets ein a , dessen kanonische Produktzerlegung gerade $a = \tilde{q}_{\tau_1} \cdot \dots \cdot \tilde{q}_{\tau_n}$ wird, wobei q_{τ_i} das zu \tilde{q}_{τ_i} gehörige Ideal aus O darstellt. — Die Theorie der Ideale von O ist damit im wesentlichen auf die Idealtheorie in den einzelnen \mathfrak{B}_τ zurückgeführt. Verf. benutzt dieses Ergebnis, um zunächst den Fall eines einartigen Multiplikationsring vom D.T. in allen Einzelheiten sorgfältig durchzudiskutieren, also den Fall, in dem die B_τ alle archimedisch geordnete Wertgruppen haben und in dem infolgedessen alle von (0) verschiedenen Primideale von O maximal sind. — Der letzte, mit dem Hauptteil nur lose verknüpfte Abschnitt der Arbeit entwickelt eine allgemeine „Streifen Theorie“ (théorie des striages), die auf sehr umfassende Klassen von geordneten Mengen, insbesondere auf geordnete Gruppen und Systeme von Ringidealen angewandt werden kann. („Streifenbetrachtungen“ waren schon im ersten Abschnitt benutzt worden, um die Beweise durchsichtiger zu gestalten; sie können dort aber eliminiert werden, wenn man rasch zum Ziele kommen will.) Die Hilfsätze über Systeme von paarweise unabhängigen Bewertungen, die man zum Beweise des Fundamentalsatzes über Multiplikationsringe vom D.T. benötigt, werden im zweiten Abschnitt hergeleitet. Sie haben durchweg elementaren Charakter.

W. Krull.

Samuel, P.: Some asymptotic properties of powers of ideals. Ann. of Math.

II. Ser. 56, 11—21 (1952).

Verf. geht aus von der Bemerkung, daß die allgemeinen, für die Idealmultiplikation gültigen Sätze wenig befriedigend sind, weil z. B. schon in einem Polynomring in zwei Variablen mit Körperkoeffizienten nicht immer aus $a \cdot b = a \cdot c$ ($a \neq (0)$) auf $b = c$ geschlossen werden kann. Er zeigt, daß man zu weit befriedigenderen Resultaten kommt, wenn man, unter Beschränkung auf Noethersche Ringe, gewisse asymptotische Eigenschaften hoher Potenzen der Ringideale untersucht. Im Referat beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Noethersche Integritätsbereiche; $r(a)$ bedeute stets das Radikal von a . Ist $r(a) \subseteq r(c)$, so sei $v_c(a, n)$ die größte positive Zahl m , derart daß $a^n \subseteq c^m$ ($n = 1, 2, \dots$). Ist ferner auch $r(c) \subseteq r(a)$, also $r(a) = r(c)$, so werde außerdem $w_c(a, n)$ als die kleinste positive Zahl m' definiert, derart daß $a^n \supseteq c^{m'}$. Es ergibt sich dann zunächst leicht: Ist $l_c(a)$ bzw. $L_c(a)$ die obere bzw. untere Grenze der Folge $v_c(a, n) \cdot n^{-1}$ bzw. $w_c(a, n) \cdot n^{-1}$ ($n = 1, 2, \dots$), so ist $l_c(a)$ bzw. $L_c(a)$ sogar der Grenzwert von unten bzw. Grenzwert von oben der betreffenden Folge. Im Falle $r(a) = r(c)$, wo nicht nur $l_c(a)$, sondern auch $L_c(a)$ definiert ist, sind $l_c(a)$ und $L_c(a)$ beide endlich, und es wird $l_c(a) \leq L_c(a)$. Für $l_c(a)$ bzw. $L_c(a)$ ergibt sich teils unmittelbar aus der Definition, teils durch eine leichte Rechnung: $l_c(a \cdot a') \geq l_c(a) + l_c(a')$; $l_c(a^n) = n \cdot l_c(a)$; $l_c(a) \geq l_c(a')$ ($a \subseteq a'$); $l_c(a + a') = \min(l_c(a), l_c(a'))$; $L_c(a \cdot a') \leq L_c(a) + L_c(a')$; $L_c(a^n) = n \cdot L_c(a)$; $L_c(a) \geq L_c(a')$ ($a \subseteq a'$); $L_c(a \cap a') \geq \max(L_c(a), L_c(a'))$. — Für Ideale mit gleichem Radikal kann man eine Äquivalenzklasseneinteilung mit den charakteristischen Eigenschaften einer Gleichheit einführen durch die Festsetzung: $a \sim c$, wenn $l_c(a) = L_c(a) = 1$. In jeder Äquivalenzklasse α existiert ein größtes Ideal a_α , nämlich die Summe aller Ideale der Klasse. Aus $a_i \sim c_i$ ($i = 1, 2$) folgt stets $a_1 + a_2 \sim c_1 + c_2$; es läßt sich also in üblicher Weise die Klassen-summe $\alpha_1 + \alpha_2$ und das Klassenprodukt $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ definieren. In der multiplikativen Halbgruppe J aller Klassen α kann leicht eine Ordnungsbeziehung und eine Potenzbildung α^s mit beliebigen reellen Exponenten s eingeführt werden. Man hat dabei nur festzusetzen: $\alpha \geq \beta$, wenn $\alpha = \alpha + \beta$ (d. h. $a_\alpha = a_\alpha + a_\beta$); $\alpha = \beta^s$, wenn $l_{a_\beta}(a_\alpha) = L_{a_\beta}(a_\alpha) = s$. Für ganze Zahlen s stimmt die Potenzbildung mit der Potenzierung im Sinne der Klassenmultiplikation überein; bei beliebigem

reellen s wird natürlich keineswegs immer in J zu β eine Klasse $\alpha = \beta^s$ existieren. Sind alle auftretenden Potenzen definiert, so erhält man die üblichen Formeln: $(\alpha^s \cdot \beta^s) = (\alpha \cdot \beta)^s$; $\alpha^s \cdot \alpha^t = \alpha^{s+t}$; $(\alpha^s)^t = \alpha^{s \cdot t}$; weiter folgt aus $\alpha^s = \alpha^t$ bzw. $\alpha^s = \beta^s$ stets $s = t$ bzw. $\alpha = \beta$. — Weit tiefer als alle diese leicht zu verifizierenden Tatsachen liegt der Kürzungssatz: In J folgt aus $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ stets $\beta = \gamma$. — Man braucht dazu die Theorie der Primärkomponentenzerlegung von Moduln über Noetherschen Ringen (vgl. E. Snapper, dies. Zbl. **36**, 289), die außerdem auf „gestufte“ (graded) Ringe und Moduln ausgedehnt werden muß. Das Kürzungsgesetz ergibt sich dann als einfache Anwendung eines mit den genannten Hilfsmitteln hergeleiteten Satzes über Noethersche Ringe, der für den Fall eines Integritätsbereichs R so lautet:

Ist $c \supset a \neq 0$, $r(a) = r(c)$, so gibt es zwei ganze Zahlen n_0, l_0 und ein $a \in a^{n_0}$, derart daß für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0 + l_0$, m stets $a^{n-n_0} \cdot c^m = [(a^{n_0} \cdot c^m) : (a \cdot R)] \cap a^{l_0}$. — Für Ideale mit gleichem Radikal führt Verf. einen zweiten Äquivalenzbegriff ein, indem er a, c „projektiv äquivalent“ nennt, falls $l_c(a) - L_c(a) > 0$. Für die bisher benutzten Klassen bedeutet das, daß man α, β [unter der Voraussetzung $r(b_\alpha) = r(a_\beta)$] als projektiv äquivalent ansieht, wenn $\alpha = \beta^s$ für passendes s . Für die projektiven Äquivalenzklassen, die durch einen Querstrich gekennzeichnet werden, läßt sich mit Hilfe der Klassenpotenzierung sinnvoll definieren, wann γ „auf der durch α und β bestimmten Geraden liegt“, und es läßt sich ein baryzentrischer Kalkül für die α einführen, auf den wir hier der Kürze halber nur hinweisen können. — Für Stellenringe S enthält die Arbeit die folgenden beiden Bemerkungen: Ist $d \geq 1$ die Dimension von S , und sind a, c zwei zum maximalen Primideal m von S gehörige Primärideale, so wird $(l_c(a))^d \leq e(a) \cdot e(c) \leq (L_c(a))^d$, falls $e(a)$ bzw. $e(c)$ die Multiplizität von a bzw. c im Sinne von Chevalley bedeutet. Ist c ein zu m gehöriges Primärideal, a von einer Dimension $d' < d$, so ist $l_c(a)$ stets endlich.

W. Krull.

Albert, A. A.: Power-associative algebras. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 25—32 (1952).

The author puts forward the question to whether there are any simple algebras behaving like associative algebras in respect to existence of idempotents, and which also are power associative algebras. The first step in answering this problem is made by finding all power associative algebras \mathfrak{A} such that $\mathfrak{A}^{(-)}$ is a central simple Jordan algebra. The construction is given in the following theorem: Let \mathfrak{A} be a power associative algebra over a field \mathfrak{F} of characteristic prime to 30, $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}^{(-)}$ be a central simple special Jordan algebra so that there exists a scalar extension \mathfrak{K} of \mathfrak{F} and an associative algebra \mathfrak{G} over \mathfrak{K} such that $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ is the set of all J -symmetric elements of \mathfrak{G} . Then \mathfrak{K} may be selected so that there exists a linear mapping T of the set of all J -skew elements of \mathfrak{G} into $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ such that the product $x \cdot y$ of \mathfrak{A} is expressible in terms of the product xy of \mathfrak{G} by the formula

$$(1) \quad x \cdot y = \frac{1}{2} (xy + yx) + (xy - yx) T.$$

Conversely if \mathfrak{G} is an associative algebra attached to a central simple Jordan algebra \mathfrak{S} and \mathfrak{A} is the vector space \mathfrak{S} of all J -symmetric elements of \mathfrak{G} , the algebra \mathfrak{A} defined by (1) is a central simple power associative algebra. — (Proofs to be given in Summa Brasil. Math.) The first part of the paper is survey of the author's study on power associative commutative algebras which can be found in this Zbl. **33**, 154; **39**, 265. The following unsolved problems are stated. The first problem concerns commutative power associative algebra \mathfrak{A} with a unity quantity e over an algebraically closed field \mathfrak{F} of characteristic p . Assume that e is primitive. Then is it true that $\mathfrak{A} = e \mathfrak{F}$? (The author has proved this result for simple algebras \mathfrak{A} over a field \mathfrak{F} of characteristic zero, and for special Jordan algebras of characteristic p .) The second problem asks whether all simple commutative algebras of degree $t = 2$ (including algebras of characteristic zero) are classical Jordan algebras.

H. Popova.

Nagata, Masayoshi: On the nilpotency of nil-algebras. J. math. Soc. Japan **4**, 296—301 (1952).

Suppose that a non-commutative ring R with the coefficient field K of characteristic 0 satisfies the condition $c(n)$ that $u^n = 0$ holds for all $u \in R$ where n is a fixed natural number. The main purpose of this paper is to prove that there exists a natural number $f(n)$ depending only on n (not on R) such that $R^{f(n)} = 0$ holds (for any such R). A sufficient value $f(n)$ is given recursively as follows. Take $f(2) = 3$. Assume that $f(m)$ is determined already for $m < n$. For given n let m be the least integer greater than $n/2$, r be the least integer such that $n - 1 \leq 2^r$ and $g(n) = 2f(m)^r$ or $f(m)^r$ according to $n - 1 = 2^r$ or $n - 1 < 2^r$. Then we can take $f(n) = g \cdot (g^2 - 2g + 2)$ ($g = g(n)$). For example, for $n = 3$, $m = 2$, $r = 1$, $g = 6$ and $f(3) = 156$. The proof consists of several lemmas on the structure of the group ring S of a symmetric group of t letters and on its operations on such a ring R , e. g. a lemma that for arbitrary elements $y_1, \dots, y_n \in R$ the relation $\sum_{\sigma \in S} y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(n)}$ always holds. To find the least possible value of $f(n)$ is the next problem which is left open. The author proves also that this least possible

value of $f(n)$ remains the same if we add a further assumption that R has a system M of generators such that $x^2 = 0$, $x R x = 0$ hold for every $x \in M$. If the characteristic p of K is $\neq 0$, there exists a counter example of a non-nilpotent commutative algebra such that $c(p)$ holds. Conjecture: the main theorem will hold if $p > n$.
Y. Kawada.

Shimura, Gorô: On a certain ideal of the center of a Frobeniusian algebra. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 2, 117—124 (1952).

Let $(u_i), (v_i)$ be conjugate bases of a Frobenius algebra \mathfrak{A} over a field K (cf. Brauer, Speiser Festschrift, Zürich 1945, pp. 233—245). Put $c = c(\mathfrak{A}) = \{\sum u_i a v_i; a \in \mathfrak{A}\}$. It is shown, first, that c is independent of the special choice of the conjugate pair of bases, is an ideal of the center c of \mathfrak{A} , and is contained in the (left, right or two-sided) annihilator $n(\mathfrak{A})$ of the radical \mathfrak{N} . \mathfrak{A} is a separable (semisimple) algebra if and only if $c = \delta$; the fact may be looked upon as Frobenius algebra extension of a separability criterion for group algebras, since if G_K is the group algebra of a finite group G over a field K of characteristic p , if z_a is the sum of distinct conjugates of a in G , and if n_a denotes the order of the normalizer of a in G , then $c(G_K) = (z_a; n_a \equiv 0(p))$. Further, $(c(G_K)^2 : K)$ is equal to the number of blocks, in G , of highest kind for p (Brauer-Nesbitt, this Zbl. 27, 152). On making use of a refinement of the Schur relation for Frobenius algebras, due to Brauer (l. c.), Nesbitt and the reviewer, it is shown that in case \mathfrak{A} is symmetric the rank of $c(\mathfrak{A})$ over K is equal to the rank, considered in K , of the matrix of Cartan invariants of \mathfrak{A} . The construction and some properties of c are extended to quasi-Frobenius algebras. On the other hand, in case of a group ring G_K , the modules $c_\lambda = (z_a; n_a \equiv 0 \pmod{p^{\lambda+1}})$ are generalizations of $c(G_K)$ and are shown to be ideals of the center of G_K .
T. Nakayama.

Morinaga, Kakutaro and Takayuki Nono: On the linearization of a form of higher degree and its representation. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 13—41 (1952).

Ausgehend von einer Gruppe $G =$ dem direkten Produkt $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ von n Gruppen G_i und einem Körper \mathfrak{K} der Charakteristik Null werden Basiselemente $A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (α_i aus G_i) eines hyperkomplexen Zahlensystems definiert. Dieses System o mit den dazugehörigen Rechenregeln bildet eine lineare, associative Algebra, die die Verf. „verallgemeinerte Cliffordsche Algebra“ nennen. Die bei der Multiplikation $e_A \cdot e_B = \zeta(A, B) e_{AB}$ auftretenden Multiplikatoren (sie sind bei späteren Anwendungen Kongruenzwurzeln) heißen Strukturzahlen. Nach einigen allgemeinen Bemerkungen werden Systeme o betrachtet, bei denen die Basisgruppe G kommutativ ist. Im besonderen wird eine verallgemeinerte Cliffordsche Algebra mit Basiselementen p_i untersucht, in der $p_0 \sum_{i=1}^n (x^i)^{m_i} = \left(\sum_{i=1}^n x^i p_i \right)^m$ für alle x_i gilt. In den letzten zwei Paragraphen wird eine Matrix-Darstellung von o gegeben, wobei \mathfrak{K} die Größe $\sqrt[m]{\omega}$ enthalten muß, wo ω eine primitive m -te Einheitswurzel ist.

R. W. Weitzenböck.

Kochendörffer, Rudolf: Erweiterungen von Gruppen und Körpern. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 455—458, ungarische und russische Zusammenfassgn. 458—459, 459 (1952).

Kurze Zusammenfassung einer früher veröffentlichten Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 32, 259).
H. Hasse.

Dieudonné, Jean: Les extensions quadratiques des corps non commutatifs et leurs applications. Acta math. 87, 175—242 (1952).

Teil I der Arbeit behandelt die Struktur derjenigen Schiefkörper K , die über einem Galoischen Unterkörper L quadratisch sind. Beschränken wir uns auf Körper mit Charakteristik $\neq 2$, so können wir die wichtigsten Ergebnisse kurz so zusammenfassen: Es gibt ein bis auf einen Rechtsfaktor aus L eindeutig bestimmtes $\theta \in K$, derart daß $\theta^2 = a \in L$; $K = L \cdot 1 + L \cdot \theta$, und daß L Invariantenkörper gegenüber dem durch $\tau(x) = x$ ($x \in L$); $\tau(\theta) = -\theta$ gekennzeichneten Automorphismus von K . Durch $\sigma(x) = \theta^{-1} x \theta$ ($x \in L$) wird ein Automorphismus $\sigma(x)$ von L mit den folgenden Eigenschaften definiert 1. $\sigma^2(x) = a^{-1} x a$. 2. $x \cdot \sigma(x) \neq a$ für alle $x \in L$. 3. $\sigma(a) = a$. Umgekehrt gehört zu jedem, den Bedingungen 1., 2., 3. genügenden Paar $a, \sigma(x)$ von L ein quadratischer Oberkörper K des Galoischen Unterkörpers L mit $K = L \cdot 1 + L \cdot \theta$, $\theta^2 = a$. Zwei quadratische Oberkörper K_i von L mit den zugeordneten Paaren, $a_i, \sigma_i(x)$ ($i = 1, 2$) können dann und nur dann identifiziert werden, wenn $\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1}$ ein innerer Automorphismus von L ist. Es sind nun, falls Z bzw. T das Zentrum von L bzw. K bedeutet, zwei Fälle zu unterscheiden: 1. $\sigma(x) = x$ für alle $x \in Z$. Hier ist $\sigma(x)$ dann und nur dann ein innerer Automorphismus von L , wenn a in Z wählbar; in diesem Sonderfall ist $T = Z(\theta)$, und es wird K das tensorielle Produkt von T und L über Z . Ist a nicht in Z wählbar, so wird

$T = Z$, und es ist L nach Skolem-Noether von unendlichem Rang über Z , weil $\sigma(x)$ ein äußerer, Z invariant lassender Automorphismus von L . Im Falle 1 heißt L ein äußerer Unterkörper von K . 2. $\sigma(x) \neq x$ für mindestens ein $x \in Z$. (Fall des inneren Unterkörpers L .) Hier ist Z quadratisch über T , und es stellt der durch σ induzierte Automorphismus σ_Z von Z den einzigen nicht identischen Automorphismus von Z über T dar. Ist L von endlichem Rang über Z , so ergibt sich aus dem Satz von Skolem-Noether, daß zwei Erweiterungen K_1, K_2 des inneren Unterkörpers L identifiziert werden können, wenn die zugeordneten Automorphismen σ_1, σ_2 denselben Automorphismus σ_Z von Z induzieren. Die Bestimmung der Oberkörper K des inneren Unterkörpers L läuft also hier hinaus auf die Bestimmung derjenigen involutorischen Automorphismen von Z , die sich zu Automorphismen von L erweitern lassen. — Es sei ferner im „inneren“ Fall $a \in Z, R = Z(\theta), M$ der zu σ gehörige Unterkörper von L . Dann erweist sich L als quadratischer Oberkörper des äußeren Unterkörpers M, R als verallgemeinerter Quaternionenkörper und es wird K das tensorielle Produkt von R und M über T . Daß a wenigstens bei unendlichem Rang von L über Z nicht immer in Z wählbar ist, wird durch ein Beispiel gezeigt. — Den Betrachtungen von Teil II liegt ein Vektorraum E von endlicher Dimension mit dem Dual E^* zugrunde über einem Schiefkörper K , der mit dem antiisomorphen Körper identifiziert werden kann, und der einen involutorischen Antiautomorphismus $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ besitzt. Eine Kollineation u ist eine hinsichtlich eines bestimmten Automorphismus $\sigma = \sigma_u$ von K semilineare Abbildung von E auf sich selbst; \bar{u} bedeutet die zu u kontragrediente Kollineation von E^* . Eine Korrelation ψ ist eine hinsichtlich $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ semilineare Abbildung von E auf E^* . Ist ψ mit der Transponierten ${}^t\psi$ identisch, so möge ψ Hermitesch heißen. Das Hauptproblem von II lautet: Es seien $\sigma_i (i = 1, \dots, m)$ Automorphismen von L , die untereinander und mit $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ bis auf einen inneren Automorphismus von L vertauschbar sind; ψ sei eine Hermitesche Korrelation, u_i eine zu $\sigma_i = \sigma_{u_i}$ gehörige Kollineation. Schließlich seien im projektiven Sinn die u_i involutorisch und untereinander sowie mit ψ vertauschbar, d. h. es sollen Gleichungen folgender Art gelten: 1. $u_i^2(x) = x \cdot c_i$; 2. $\psi \cdot u_i = \bar{h}_i \cdot \bar{u} \cdot \psi$; 3. $u_i \cdot u_j = u_j \cdot u_i \cdot a_{ij}$ ($c_i, \bar{h}_i, a_{ij} \in K$). Zu untersuchen ist die Gruppe Γ aller mit den u_i und ψ vertauschbaren Kollineationen u . Das Endresultat lautet: Es gibt ein Rekursionsverfahren, um in jedem Falle das Studium von Γ (oder wenigstens einer ausgezeichneten Untergruppe von endlichem Index) zurückzuführen auf den Fall, wo Γ definiert ist als die Gruppe aller der Kollineationen, die mit einer einzigen involutorischen Kollineation oder Hermiteschen Korrelation vertauschbar sind. Daher tritt allerdings an Stelle des Körpers K ein anderer Grundkörper L . Man gewinnt L aus K in endlich vielen Einzelschritten, wobei jedesmal der bereits konstruierte Körper ersetzt werden muß durch einen quadratischen Oberkörper oder durch einen Unterkörper, über dem er selbst quadratisch ist. — Damit ist eine von Spezialfällen her bekannte Methode in umfassendster Weise verallgemeinert. Der Beweis, bei dem es naturgemäß auf den ersten Schritt (Übergang von m zu $m - 1$ Kollineationen u_i) ankommt, erfordert eine sehr stabile, auf die Sätze von I gestützte Untersuchung. Man hat folgende Fallunterscheidungen: 1. c_1 besitzt nicht die Gestalt $\lambda \cdot \lambda^{\sigma_1}$ ($\lambda \in K$, nur für $n = 2 \cdot m$ möglich). Hier existiert nach I eine quadratische Erweiterung $L = K \cdot 1 + K \cdot \theta$ mit $\theta^2 = c_1$ und $\xi^{\sigma_1} = \theta^{-1} \xi \theta$ ($\xi \in K$), und der Übergang von K zu L ermöglicht die Elimination von u_1 . — 2. $c_1^{\sigma_1} = \lambda \cdot \lambda^{\sigma_1}$ ($\lambda \in K$). Hier hat man K durch den Invariantenkörper L des durch $\xi \rightarrow \xi^{\tau} = \lambda \xi^{\sigma_1} \lambda^{-1}$ definierten Automorphismus τ zu ersetzen, wobei die zwei allein möglichen Fälle „ $K = L$ “ und „ K quadratisch über L “ zu unterscheiden sind. — Die Bedeutung der Resultate von II beruht vor allem auf dem Umstand, daß die Hermiteschen Korrelationen umkehrbar eindeutig den höchstrangigen in E definierbaren Hermiteschen Formen entsprechen. Man hat so die Möglichkeit, die Reduktionsmethode auf den Fall anzuwenden, daß diejenigen Kollineationen betrachtet werden, die endlich viele Hermitesche Formen H_i im projektiven Sinne invariant lassen, sofern nur die den H_i entsprechenden Korrelationen ψ_i der Bedingung genügen, daß $\psi_i \cdot \psi_j^{-1}$ für jedes Paar i, j eine involutorische Kollineation wird. — In Teil III wird für einen kommutativen Körper K mit von 2 verschiedener Charakteristik die verallgemeinerte orthogonale Gruppe $GO_n(K; f)$ aller der linearen Automorphismen u des n -dimensionalen Vektorraums E über K betrachtet, die eine nicht singuläre (aber i. a. nicht definite), symmetrische Bilinearform $f(x, y)$ bis auf einen Faktor aus K in sich überführen: $f(u(x), u(y)) = \lambda_u \cdot f(x, y)$. Für gerades $n = 2 \cdot m$ ist in $GO_n(K; f)$ die i. a. nicht direkt zerlegbare Gruppe $GO_n^+(K; f)$ aller u mit $\det u = \lambda^m$ ausgezeichnet. Für ungerades n kommt man durch Abspaltung eines trivialen direkten Faktors von $GO_n(K; f)$ zur Gruppe $O_n(K; f)$ aller u mit $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$, in der weiter die Untergruppe $O_n^+(K; f)$ aller u mit $\det u = 1$ gebildet werden kann. Teil III bringt nun eine ausgezeichnete, eingehende Diskussion der Gruppen $O_3^+(K; f)$, $O_5^+(K; f)$ bzw. $GO_4(K; f)$, $GO_6(K; f)$. Vorbild ist dabei die von van der Waerden in dem Ergebnisbericht über Gruppen linearer Transformationen benutzte Methode. Die nötigen Hilfsmittel zur Behandlung der von van der Waerden beiseite gelassenen Fälle liefern die Ergebnisse von Teil II. Das Hauptinteresse gilt solchen Spezialfällen, in denen sich $GO_n^+(K; f)$ bzw. $O_n^+(K; f)$ als direktes Produkt von einfacheren Gruppen bzw. von Quotientengruppen solcher Gruppen darstellen läßt. Bei der Systematik spielt für die Klassifizierung außer der Frage, ob für die Diskriminante d

von $f(x, y)$ die Gleichung $x^2 = \pm d$ in K lösbar ist, eine Hauptrolle der Index ν von $f(x, y)$ in dem von E. Witt (dies. Zbl. 15, 57f.) eingeführten Sinne. Dabei kommt es nicht nur auf den Wert von ν über dem gegebenen Grundkörper K an, sondern auch auf den Wert über gewissen quadratischen Erweiterungen L von K . — In dem relativ kurzen Teil IV führt Verf. unter entsprechenden Voraussetzungen wie in II, aber unter Beschränkung auf unendliche K die zu einer Hermiteschen Form f gehörige unitäre Gruppe $U_n(K, f)$ und die aus ihr durch Quotientenbildung nach dem Zentrum entstehende projektive unitäre Gruppe $PU_n(K; f)$ ein. Mit Hilfe der allgemeinen Methode von II werden in $PU_n(K; f)$ die „Involutionen zweiter Art“ und ihre Zentralisatoren bestimmt. — Ein umfangreicher Anhang bringt Ergänzungen und Verbesserungen zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 40, 229). W. Krull.

Krasner, Marc: Généralisations non-abéliennes de la théorie locale des corps des classes. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 71—76 (1952).

Auszug eines Vortrages, den Verf. im Jahre 1950 beim Internat. Math.-Kongr., Cambridge, Mass., gehalten hat. Verf. beweist zunächst den folgenden Satz, welcher in seiner Theorie eine große Rolle spielt: Es sei k ein nicht-archimedisches bewerteter, perfekter Körper und \mathfrak{K} eine algebraisch-abgeschlossene, algebraische Erweiterung über k . Ist dann C_α ($\alpha \in \mathfrak{K}$) der größte Kreis mit α als dem Zentrum von der Art, daß es in C_α außer α kein zu α konjugiertes Element aus \mathfrak{K}/k gibt, so folgt aus $\beta \in C_\alpha$ ($\beta \in \mathfrak{K}$) stets $k(\beta) \supseteq k(\alpha)$. Ist K eine endliche separable Erweiterung über k , so kann man den Führer von K/k definieren. Ist dann k lokalkompakt in bezug auf die Bewertung von k und K über k vollverzweigt, so läßt sich eine Invariante von K/k definieren, welche durch den Führer von K/k , die Differente von K/k , den Grad von K nach k und die Anzahl der verschiedenen, zu K konjugierten Körper aus \mathfrak{K}/k eindeutig bestimmt ist. Man kann aus dieser Invariante ablesen, wann K über k galoissch ist (Abgrenzungssatz für galoissche Erweiterung). Ferner kann man die Anzahl der Erweiterungen mit einer gegebenen Differente und mit einem gegebenen Grad über k bestimmen. Weiter entwickelt Verf. die Approximationstheorie eines beliebigen nicht-archimedisches bewerteten perfekten Körpers durch eine Körperfolge, deren Glieder alle von der Charakteristik Null sind und auch nicht-archimedisches bewertete Körper sind. Vgl. auch den Vortrag des Verf., dies. Zbl. 40, 159. M. Moriya.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Hasse, H.: Über das Problem der Primzerlegung in Galoisschen Zahlkörpern. S.-Ber. Berliner math. Ges. 1951/52, 8—27 (1952).

The history and present state of the problem of decomposition into primes in algebraic number fields are reviewed. The problem is introduced as the problem of a characterization, in the sense of constructive view, of the set $\mathfrak{M}(n_1, n_2, \dots, n_r)$ of prime numbers modulo which a given monic irreducible polynomial f (of degree $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$) with rational-integral coefficients is decomposed after the „decomposition type“ (n_1, n_2, \dots, n_r) . The Frobenius' density theorem is given, which asserts that the density of the set $\mathfrak{M}(n_1, n_2, \dots, n_r)$ relative to the set of all primes not dividing the discriminant of f is equal to the relative frequency in the Galois group of f , given as a permutation group of roots of f , of permutations of type $(n_1)(n_2) \dots (n_r)$. On translating the problem into invariant terminologies of prime ideal decomposition in an algebraic number field, and introducing Frobenius' substitution, Tschebotarew's, finer density theorem is stated. As the cases hitherto solved, the quadratic case ($n = 2$) by Euler and Gauss, Kummer's case of the field $\mathbb{P}(\sqrt[m]{1})$ (\mathbb{P} being the rational number field), Kronecker's case of general cyclotomic fields (over \mathbb{P}) are discussed, in conjunction with the quadratic reciprocity law, Dirichlet's prime number theorem and Takagi's general class field theory. The metabelian case, with a solvable Galois group, has been investigated in many instances by the author and his followers and is accessible in principle by reduction to relative abelian case; but to state the decomposition law, in the general metabelian case, in a form independent of the choice of composition series of the Galois group is an open problem. As a case for which such has been done, the case of cubic fields is observed; the solution being in terms of quadratic-residue symbol and quadratic forms. Next the author's (this Zbl. 39, 270) theory of Galois algebras and its reformulation by Wolf (this Zbl. 47, 269) are alluded to, to the effect to generalize the theory of Kummer fields. Noether's theory of crossed products and the Brauer-Hasse-Noether principal theorem of algebras over algebraic number fields are introduced, and the characterization, not in the above said sense however, of primes completely splitting in a Galois field K as primes at which every crossed product (K, γ) associated with K splits locally is given. Further, Dirichlet's L -functions, associated with characters of an abelian Galois group, are introduced, and together with the conductor-discriminant formula, the factorization of Dirichlet's ζ -function into the L -functions is discussed as a reformulation of the decomposition law. Then Artin's L -functions and conductors, associated with characters of a general non-abelian Galois group, are introduced; the secret of the general decomposition law, if exists, lies hidden in the

open problems what the analogy for the former of the sum-expression of Dirichlet's L -functions would be and what the significance of the latter as congruence modules would be. Finally the author's (this Zbl. 48, 269) theory of generalized Gauss sums, associated with characters of the Galois group and defined as factors in the functional equations of L -functions, is cited. Such a generalized Gauss sum can be decomposed into a product of abelian ones, its absolute value is the square root of [the absolute norm of (in relative case)] the conductor with the same character and its formal behaviours are similar to those of the L -function and the conductor. Here the secret of the decomposition law in question lies in the problem what the analogy for such a generalized Gauss sum of the ordinary expression as a finite sum of roots of unity, for an ordinary Gauss sum, would be.

T. Nakayama.

Šafarevič, I. R.: Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Anwendungen in der Theorie der algebraischen Zahlen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 291—294, 295—298 (1952) [Russisch und Ungarisch].

This is an expository article mainly devoted to explaining the significance of certain work of the author (this Zbl. 32, 392; 36, 159).

P. T. Bateman.

Weil, André: Number-theory and algebraic geometry. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 90—100 (1952).

Verf. weist auf die Beziehungen grundlegender Fragen der algebraischen Geometrie und Zahlentheorie zu Gedanken aus Kroneckers „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen“ hin und zeigt, vom Begriff der allgemeinen Spezialisierung ausgehend, wie endlich-algebraische Zahlkörper und endliche Kp. als „natürliche“ Grundkp. in den Vordergrund des Interesses treten (vgl. auch Kählers allgem. Programm der arithmetischen Kp., dies. Zbl. 43, 39). Bei Verwendung von Stellenringen und Bewertungen lassen sich andere Grundkp. (komplexer Zahlkp., p -adische Kp.) und algoide Mannigfaltigkeiten in systematischer Weise einordnen. Neben anderen Bemerkungen (z. B. u. a. zur Höhe eines variablen Punktes auf einer Mannigfaltigkeit) zeigt Verf., wie man zur Definition einer Zetafunktion für Körper der Kroneckerschen Dimension 2 geführt wird (vgl. Verf., dies. Zbl. 32, 394; 48, 270) und welche Fragestellungen bei diesen Funktionen auftreten.

E. Lamprecht.

Zahlentheorie:

● **Gloden, A.:** Table de factorisation des nombres $N^4 + 1$ dans l'intervalle $3000 < N < 6000$. Luxembourg: Gloden 1952. I, 51 p. 80 belg. fres.

● **Voronoj, G. F.:** Gesammelte Werke. In drei Bänden. Bd. I, II. Kiev: Verlag der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR 1952. 399, 391 S. R. 28,70; 28,50 [Russisch].

The Russian number-theorist G. F. Voronoj (1868—1908) published only a small number of papers, but most of them were rather extensive and of fundamental importance. Thus the publication of his collected works is very welcome. The two volumes under review contain all of his major papers, eight in number. A projected third volume is to contain the short papers and abstracts, a biographical sketch, and, most significantly, „certain incompleated works on indefinite quadratic forms, which were taken from his manuscripts“. [Some of the latter have already been published, cf. Voronoj, Ukrain. mat. Žurn. 3, 240—271, 272—278 (1951); Venkov, *ibid.* 279—289 (1951)]. — Volume I contains three papers originally published in Russian and not readily available until now. The first of these is a paper written while he was a student, „On the Bernoulli numbers“, Soobščeniija Char'kovsk. Mat. Obsč., II. Ser. 2, 129—148 (1890). In it he proved a rather general congruence involving the Bernoulli numbers and gave several applications thereof. [Most of the material in this paper has found its way into Uspensky and Heaslet's „Elementary number theory“ (New York 1939, this Zbl. 24, 247), namely on pp. 178—184 and 258—262.] The second is his master's dissertation, „On the algebraic integers which depend on a root of a cubic equation“ (St. Petersburg 1894), a work which occupies 170 pages in this printing. In this he studied the integral bases and the decomposition into prime ideal factors in cubic algebraic number fields. In addition, he proved that a cubic congruence $x^3 \equiv rx + s$ modulo an odd prime number p

has exactly one solution if $4r^3 - 27s^2$ is a quadratic non-residue modulo p and either three or zero solutions if $4r^3 - 27s^2$ is a quadratic residue modulo p . At the end of the paper he gave certain tables relating to the finite field of p^2 elements for each odd prime number p less than 200. The third and last paper in Volume I is his doctoral dissertation, „On a generalization of the continued-fraction algorithm“ (Warsaw 1896), a work which in this printing covers 195 pages. In this he gave algorithms for finding a system of fundamental units in a cubic algebraic number field, for telling whether or not two ideals in a cubic field are the same, and for determining the number of ideal classes in a cubic field. Although these algorithms were given in arithmetical form, they are essentially based on geometrical ideas, as was pointed out by Delone [C. r. Acad. Sci., Paris, **176**, 554—556 (1923)]. — The five papers in Volume II are somewhat more familiar than those in Volume I, since they were originally published in French in readily accessible journals. The first is his epoch-making paper on the divisor problem, „Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques“, J. reine angew. Math. **126**, 241—282 (1903), in which he showed that

$$\sum_{n=1}^x d(n) = x(\log x + 2C - 1) + O(x^{1/3} \log x),$$

where $d(n)$ is the number of divisors of n and C is Euler's constant. This was the first non-trivial result in the field of lattice-point problems and did much to awaken interest in that subject. He continued this work in the paper, „Sur une fonction transcendente et ses applications à la sommation de quelques séries“, Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **21**, 207—267, 459—533 (1904). Here he gave the first proof of the explicit formula for the divisor problem and developed his famous summation formula associate with the divisor function. (The transcendental function referred to in the title of the paper is the inverse Mellin transform of the square of the gamma function.) In the paper, „Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des sommes doubles $\sum f(p^2 m^2 + 2qmn + rn^2)$, où $p^2 m^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers“, Verh. d. 3. intern. math. Kongr. Heidelberg, 241—245 (1905), he gave an admittedly heuristic derivation of the explicit formula for the ellipse problem; this formula was later proved rigorously by Hardy, Quart. J. Math. **46**, 263—283 (1915). The final two papers in Volume II are: „Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier Mémoire: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. Deuxième mémoire: Recherches sur les paralléloèdres primitifs“, J. reine angew. Math. **133**, 97—178 (1908), *ibid.* **134**, 198—287 (1908) and *ibid.* **136**, 67—181 (1909). These are probably his most important papers. They continue the work of Hermite and Minkowski on the reduction theory of quadratic forms in several variables. — At the end of each of these two volumes there are brief commentaries on the papers therein, variously written by Delone, Linnik, and Venkov. More extensive commentaries on some of the papers are to be found in Delone's book „The Petersburg School of the theory of numbers“ (Moscow 1947, this Zbl. **33**, 104), pp. 195—318.

P. T. Bateman.

● **Kraitchik, M.**: Introduction à la théorie des nombres. Paris: Gauthier-Villars 1952. VII, 202 p. 2300 fr.

Der eigenartige Charakter dieser „Einführung in die Zahlentheorie“ tritt bereits im einführenden Kap. I hervor, dessen Nr. 1 folgendermaßen lautet: „Die Zahl N heißt Primzahl, wenn sie durch keine ganze Zahl außer 1 und N teilbar ist. Das ist der Fall für die Zahlen

$$2, 3, 5, 7, \dots, 2^{31} - 1, \dots, (10^{19} - 1)/9, \dots, 2^{61} - 1, \dots, (10^{23} - 1)/9, \dots, 5 \cdot 2^{75} + 1, \dots, \\ 2^{289} - 1, \dots, 2^{107} - 1, \dots, 2^{127} - 1, \dots, (2^{148} + 1)/17, \dots$$

Jede Zahl, die keine Primzahl ist, heißt zusammengesetzt. Das ist der Fall für die Zahlen

$$4, 6, 8, 9, \dots, 2^{128} + 1, \dots, 2^{256} + 1, \dots, 2^{257} - 1, \dots$$

Wie in seinen früheren Büchern über Zahlentheorie legt Verf. auch in dieser „Einführung“ den Nachdruck auf das Numerische und insbesondere auf die Entwicklung von Verfahren, die elementar-zahlentheoretische Aufgaben (wie Primzahlzerlegung, Lösung simultaner Kongruenzen, Auffinden einer Primitivwurzel, Bestimmung von Potenzrestcharakteren, ...) für sehr große Zahlen rechnerisch zu lösen gestatten. — In den ersten neun Kapiteln werden die Grundlagen der elementaren Zahlentheorie behandelt (Primzerlegung, größter gemeinsamer Teiler, Teileranzahl, befreundete und vollkommene Zahlen, Eulersche Funktion, Kongruenzen, Fermatscher und Wilsonscher Satz, binomische und exponentielle Kongruenzen, binomische Gleichungen, lineare Kongruenzen, quadratisches Reziprozitätsgesetz, Teiler quadratischer Formen). Die Beweise erfolgen meist nach dem geläufigen Schema, allerdings ohne Heranziehen moderner algebraischer Begriffe wie Gruppe, Charaktere, Körper, Ring, Ideal. An jeden theoretischen Satz werden numerische Beispiele, Berechnungsverfahren, Tabellen, Probleme angeschlossen, und man bekommt so eine Fülle von Material über individuelle Eigenschaften einzelner Zahlen oder Zahlenklassen an die Hand. Als Anwendungsbeispiel zum Reziprozitätsgesetz etwa wird die diophantische Gleichung $x! + 1 = y^2$ mit den ohne weiteres ersichtlichen Lösungen $(x, y) = (4, 5), (5, 11), (6, 71)$ behandelt und eine Anleitung zum Beweis gegeben, daß im Bereich $x < 1020$ keine weiteren Lösungen vorhanden sind. — Die restlichen fünf

Kapitel behandeln Gegenstände und Methoden, die vor allem als Hilfsmittel zur Entscheidung über die Primzahleigenschaft und Herstellung der Primzahlzerlegung Interesse haben [Reste großer Zahlen nebst Anwendung auf die Gleichungen $x^2 \pm Dy^2 = \pm N$, die Gleichung $x^2 - y^2 = N$, Satz von Lucas über den wesentlichen irreduziblen Faktor von $a^n \pm b^n$ mit Anwendung auf rekurrente Reihen, direkte Methoden zur Feststellung der Primzahleigenschaft nebst Anwendung auf die Fermatschen Zahlen $2^{2^k} + 1$, die Mersenneschen Zahlen $2^p - 1$ und die Zahlen $k \cdot 2^n - 1$ (k ungerade und verhältnismäßig klein)]. — Unter den zahlreichen dem Buch beigegebenen Tabellen seien hervorgehoben: Potenzreste der Exponenten $n = 2, 3, 4$ für die Primzahlen $p < 200$, ebenso $n = 5, p \leq 421$; $n = 6, p \leq 241$; $n = 7, p \leq 631$; $n = 11, p \leq 991$. Primzerlegung von $n! \pm 1$ ($n \leq 22$), $p_1 \cdots p_n \pm 1$ ($n \leq 16$), $2^n \mp 1$ ($n \leq 135$ ungerade, mit einigen Lücken), ähnliche Tabellen für $2^{2^n} + 1$, $10^n \pm 1$. Teiler von $x^2 \pm Dy^2$. Hilfstafel zur Konstruktion von Lösungen von $x^2 - y^2 = N$. — Auf Schritt und Tritt spürt man in dem Buch das große, zum Teil raffinierte Geschick des Verf. in der Erfindung und Anwendung numerischer Methoden und Kunstgriffe. Auch der mehr theoretisch interessierte Leser wird darin mancherlei finden, was ihn zum Nachdenken und Auffinden neuer zahlentheoretischer Erkenntnisse anregt.

H. Hasse.

Jakóbczyk, Franciszek: Les applications de la fonction $\lambda_g(n)$ à l'étude des fractions périodiques et de la congruence chinoise $2^n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A. 5, 97—128, poln. und russ. Zusammenfassgn. 128—137, 137—138 (1952).

Im Zahlssystem mit einer beliebigen natürlichen Grundzahl $g > 1$ hat jeder echte reduzierte Bruch l/m mit zu g primem Nenner m bekanntlich eine rein-periodische Entwicklung $0.c_1 \dots c_2$. Diese liest man aus der erweiterten Darstellung $l/m = (c_1 g^{\lambda-1} + \dots + c_{\lambda})/(g^{\lambda} - 1)$ ab, wobei die primitive Periodenlänge $\lambda = \lambda_g(m)$ die Ordnung der primen Restklasse $g \bmod m$ ist. Man erhält die Entwicklung auch durch das systematische g -adische Divisionsverfahren $g r_{i-1} = c_i m + r_i$ mit $r_0 = l$, wobei r_i der kleinste positive Rest von $g^i l \bmod m$ ist. Für $\bar{g} \equiv g^{\pm 1} \bmod m$ als neue Grundzahl ist die Länge $\lambda_{\bar{g}}(m) = \lambda_g(m)$, und es berechnen sich die Reste und Ziffern für \bar{g} aus denen für g nach dem Schema $\bar{r}_i = r_i$ bzw. $r_{\lambda-i}$ und $\bar{c}_i = k r_{i-1} + c_i$ bzw. $k r_{\lambda-i} - \bar{g} c_{\lambda-(i-1)}$, wenn $\bar{g} = g + km$ bzw. $g\bar{g} \equiv 1 + km$ ist. Wenn $\lambda = 2\lambda_0$ gerade und $g^{\lambda_0} \equiv -1 \bmod m$ ist, zerfallen Ziffernfolge und Restfolge in zwei Hälften mit $c_i + c_{i+\lambda_0} = g - 1$ und $r_i + r_{i+\lambda_0} = m$. Umgekehrt folgt aus diesem Verhalten der Ziffernfolge (für alle $i = 1, \dots, \lambda_0$) oder Restfolge (für ein $i = 0, \dots, \lambda_0 - 1$), daß $\lambda = 2\lambda_0$ und $g^{\lambda_0} \equiv -1 \bmod m$ ist. Verf. sagt dann, m habe für g die Eigenschaft D. Er beweist für diese Eigenschaft in breiter, elementarer Ausführlichkeit das folgende Kriterium, das eine fast unmittelbare Folge aus der geläufigen Struktur der primen Restklassengruppe $\bmod m$ ist. Im Hinblick auf die Isomorphie der primen Restklassengruppen $\bmod m$ und $\bmod 2m$ für ungerades m kann ohne Einschränkung m ungerade oder $2^1 m$ vorausgesetzt werden. Ein ungerades $m = \prod_{p|m} p^{\mu(p)}$ erfüllt D für g genau dann, wenn alle $\lambda_g(p)$ gerade und genau durch ein und dieselbe 2-Potenz teilbar sind. Ein $m = 2^\mu \prod_{p \neq 2} p^{\mu(p)}$ ($\mu \geq 2$) erfüllt D für g genau dann, wenn alle $\lambda_g(p)$ gerade

und genau durch 2^1 teilbar sind sowie $g \equiv -1 \bmod 2^\mu$ ist. So ist beispielsweise D erfüllt, wenn m aus Primzahlen $p \equiv -1 \bmod 2^2$ zusammengesetzt ist, für die durchweg g Primitivwurzel ist, dagegen nicht, wenn m zwei Primzahlen $p \equiv 1, p' \equiv -1 \bmod 2^2$ enthält, für die beide g Primitivwurzel ist. — Verf. beschäftigt sich ferner mit den natürlichen Zahlen n , die der chinesischen Kongruenz $2^n \equiv 2 \bmod n$ genügen. (Die Chinesen hatten vermutet, daß diese Kongruenz nur für Primzahlen n besteht, was sich als falsch erwies hat.) Nach Sierpiński [Zahlentheorie, Warszawa 1950 (polnisch), dies. Zbl. 41, 16] erfüllt mit einem ungeraden n auch $n' = 2^n - 1$ die chinesische Kongruenz, und ferner besteht diese Kongruenz für alle Mersenneschen Zahlen $n = 2^p - 1$ (p Primzahl), alle Fermatschen Zahlen $n = 2^{2^p} + 1$ ($p \geq 0$) und alle sogenannten Pseudoprimezahlen, d. h. ungeraden Zahlen n mit $g^{n-1} \equiv 1 \bmod n$ für alle primen $g \bmod n$. Verf. beweist diese Tatsache erneut aus den elementaren Eigenschaften der Ordnung $\lambda_g(n)$ von $g \bmod n$. Er fügt die beiden einfachen Bemerkungen hinzu, daß ein ungerades $n = 2^m + 1$, das der chinesischen Kongruenz genügt, notwendig eine Fermatsche Zahl ist ($m = 2^p$), und daß die chinesische Kongruenz nicht gleichzeitig für ein ungerades n und für $n' = 2n$ bestehen kann. Ferner beweist er das folgende Kriterium. Für ungerades $n = \prod_{p|n} p^{\nu(p)}$ besteht die chinesische Kongruenz genau dann, wenn alle $\lambda_2(p)|n - 1$ und alle $\nu(p) \leq \nu_2(p)$ sind, wo $\nu_2(p)$ den Exponenten der in $2^{\lambda_2(p)} - 1$ steckenden p -Potenz bedeutet [also $\nu_2(p) > 1$ genau für die Wieferichschen Primzahlen]; speziell für $n = p^r$ genügt wegen $\lambda_2(p) | p - 1$ $p^r - 1$ die Forderung $\nu(p) \leq \nu_2(p)$. Für gerades $n = 2n_0$ besteht die chinesische Kongruenz genau dann, wenn

$n_0 = \prod p^{v(p)}$ ungerade ist, sowie alle $\lambda_2(p)|n-1$ und alle $v(p) \leq v_2(p)$ sind; speziell für $n = 2^{p^n}$ ist das unmöglich, weil $2^{p^n} - 1 \equiv 1 \pmod{p-1}$, also $\pmod{\lambda_2(p)}$, und $\lambda_2(p) > 1$ ist. Für die Mersenneschen Zahlen, Fermatschen Zahlen und Pseudoprimezahlen $n = \prod p^{v(p)}$ ergibt sich aus diesem Kriterium die Exponentenbeschränkung $v(p) \leq v_2(p)$, also $v(p) > 1$ höchstens für Wieferichsche Primzahlen. Für die Pseudoprimezahlen folgert man aus ihrer Definition leicht, daß sogar durchweg $v(p) = 1$ ist (sowie überdies, daß mindestens drei Primteiler $p|n$ vorkommen). Verf. schließt mit der Vermutung, daß auch für die Mersenneschen und Fermatschen Primzahlen durchweg $v(p) = 1$ ist.

H. Hasse.

Lekkerkerker, C. G.: Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von Fibonacci'schen Zahlen. Simon Stevin 29, 190—195 (1952) [Holländisch].

Theorem 1. If N is a positive integer, then there exists one and only one expansion $N = \sum_{v=1}^k u_{i_v}$, where u_{i_1}, \dots, u_{i_k} are numbers of the Fibonacci sequence u_1, u_2, \dots and $i_{v+1} \geq i_v + 2$; moreover holds $u_{i_k} \leq N < u_{i_k+1}$. — **Proof:** Induction to N . — This expansion $\sum_{v=1}^k u_{i_v}$ is associated with an aggregate $[e_{i_k}, e_{i_k-1}, \dots, \dots, e_2, e_1]$ where $e_\mu = 1$ or 0 according u_μ occurs in the expansion or does not. Let r be the rank of N defined by $u_r \leq N < u_{r+1}$. Let $\psi(r)$ be the arithmetical mean of the number of ones of the aggregates with rank r . **Theorem 2.** $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \psi(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \sqrt{5}\right)$. — **Proof:** A recursion formula for numbers involving $\psi(r)$.

W. Verdenius.

Sierpinski, W.: Sur une propriété des nombres premiers. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 21, 537—539 (1952).

Eine Folge p_n streng wachsender positiver ganzer Zahlen habe die Eigenschaft P , wenn $1. p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17$ und $2. p_{n+1} < 2p_n$ für $n = 1, 2, \dots$ gilt. Ein Beispiel ist die Primzahlmenge. Verf. beweist: Besitzt die Folge p_n die Eigenschaft P , so läßt sich für $n \geq 3$ jede ungerade Zahl $u \leq p_{2n+1}$ bei passender Wahl der Vorzeichen in der Form $u = \pm p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{2n-1} + p_{2n}$ darstellen. Im wesentlichen durch Spezialisierung folgen die Darstellungsmöglichkeiten $p_{2n} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{2n-2} + p_{2n-1}$ und $p_{2n+1} = 1 \pm p_1 \pm p_2 \pm \dots \pm p_{2n-1} + 2p_n$ jeweils für $n = 1, 2, \dots$. Der Beweis obigen Satzes gelingt durch einen einfachen und elementaren Induktionsschluß.

H. Ostmann.

● **Estermann, T.: Introduction to modern prime number theory.** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 41) Cambridge: At the University Press 1952. 74 p. 12 s. 6 d. net.

Das Ziel dieses Büchleins ist, „solchen Mathematikern, die nicht speziell Zahlentheoretiker sind, ohne allzu große Anstrengung einige nichtelementare Ergebnisse und Methoden der Zahlentheorie nahe zu bringen“. Das mathematische Ziel ist der bekannte Satz von Vinogradoff, daß jede genügend große ungerade Zahl als Summe von drei Primzahlen dargestellt werden kann. Vorausgesetzt wird die Kenntnis des Buches „An Introduction to the theory of numbers“ von Hardy und Wright, Oxford 1938, dies. Zbl. 20, 292. Als Zwischenresultate seien genannt: Der Beweis des Primzahlsatzes nach Landau, der Primzahlsatz für Restklassen \pmod{k} mit einem in k gleichmäßigen Restglied nach einer Methode von Siegel. Leider wird die Theorie der Charaktere ohne Erwähnung des Gruppenbegriffes dargestellt. — In einem Anhang befindet sich eine Liste aller wichtigen Sätze und Formeln.

E. Witt.

Linnik, Ju. V.: Einige das binäre Goldbachsche Problem betreffende bedingte Sätze. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 503—520 (1952) [Russisch].

The author proves several conditional theorems (that is, theorems based on unproved hypotheses) relating to Goldbach's conjecture that every sufficiently large even integer is a sum of two prime numbers. Some of these results were announced in an earlier paper (this Zbl. 42, 271). For example, under the assumption of the extended Riemann hypothesis he proves the following. If N is any positive integer, Q is a positive integer less than $N/\ln^6 N$, and $N(Q-1)$ is even, then there

exists a positive integer h less than $\ln^6 N$ and prime numbers p and p' such that $p + p' = N + Qh$. [Actually the author states the conclusion of this theorem simply as „there exist prime numbers p and p' such that $p + p' = N \pmod{Q}$ “. However, this weaker form of the theorem follows immediately from Dirichlet's theorem and the easily proved fact that if N and Q are positive integers such that $N(Q-1)$ is even, then the congruence $x + y \equiv N \pmod{Q}$ is solvable in integers x and y relatively prime to Q . The stronger form stated above is what the author really proves.]

P. T. Bateman.

Carlitz, L.: A problem of Dickson. Duke math. J. **19**, 471—474 (1952).

Let $GF(p^n)$ be a field of p^n elements. The author proves the following theorem: Let $F(x)$ be a polynomial of degree k . If $F(a)$ is a non-zero square of $GF(p^n)$ for all a in $GF(p^n)$, then $F(x) = H^n(x)$, where $H(x) \in GF[p^n, x]$, provided $p^n > (k-1)^2$. This answers a conjecture raised by Dickson [Trans. Amer. math. Soc. **10**, 109—122 (1909)].

L. K. Hua.

Carlitz, L.: The number of solutions of certain equations in a finite field. Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 515—519 (1952).

By the method of exponential sums over a finite field $GF(p^n)$, the author obtains a number of results about the number of solutions of a certain type of equations. For example, he proves that the number of solutions of $\xi_1^{a_1} \cdots \xi_k^{a_k} = f(\xi_1, \dots, \xi_r)$ in ξ_i, ξ_j is equal to

$$(p^{nk} - (p^n - 1)^k) A(0) + (p^n - 1)^{k-1} \sum_{\alpha \neq 0} A(\alpha),$$

where f denotes a polynomial in this field, $A(\alpha)$ is the number of solutions of $f(\xi_1, \dots, \xi_r) = \alpha$ ($\alpha \in GF(p^n)$).

L. K. Hua.

Carlitz, L.: Sums of primitive roots in a finite field. Duke math. J. **19**, 459—469 (1952).

Let $GF(p^n)$ be a field of p^n elements. Let $N_r(\alpha)$ be the number of decompositions of an element α of $GF(p^n)$ into r primitive roots in $GF(p^n)$. The author establishes by the method of exponential sums that $N_r(\alpha) = \Phi^r(p^n - 1)/(p^n - 1) + O(p^{n(r-3/2)+\varepsilon})$. Several generalizations are given.

L. K. Hua.

Vinogradov, I. M.: Ein neuer Zugang zur Abschätzung der Summe der Werte $\chi(p+k)$. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **16**, 197—210 (1952) [Russisch].

The paper contains the detail proof of a theorem announced in a previous note (this Zbl. **39**, 38): Let k be an integer, q be a prime and $\chi(n)$ be a non-principal character, mod q . For $q \nmid k$, we have

$$S = \sum_{p \leq N} \chi(p+k) \ll N^{1+\varepsilon} (q^{3/4} N^{-1})^{1/4}$$

for any $\varepsilon > 0$, provided that q is sufficiently large and $q^{3/4} \ll N \ll q^{5/4}$. The ingenious part of the method lies on the approximation of a sum over a hyperbolic region by a double summation over rectangular regions.

L. K. Hua.

Weil, André: Sur les „formules explicites“ de la théorie des nombres premiers. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 252—265 (1952).

The explicit formulas in the theory of the distribution of prime numbers are identities connecting certain sums over the prime-powers with sums over the zeros of the Riemann zeta-function (cf. Landau's Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, §§ 87—88). There are analogous formulas connecting sums over the powers of the prime ideals of an algebraic number field with sums over the zeros of the Dedekind zeta-function of the field (cf. Landau's Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig 1927, § 22). The author generalizes these results as follows. Let F be a piecewise smooth (complex-valued) function on the reals such that both $F(x)$ and $F'(x)$ are $O(e^{-(1/2+b)|x|})$ for some positive number b , and let $\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{(s-1/2)x} dx$ for $-b < R(s) < 1+b$. Suppose that k is an algebraic number field and that χ is a „Größencharakter“ of k . Let ω run through the zeros of the Hecke zeta-function $\zeta(s, \chi)$ which lie in

the strip $0 \leq R(s) \leq 1$, and let \mathfrak{p} run over the prime ideals of k . Then the author derives an identity connecting

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|I(\omega)| < T} \Phi(\omega) \text{ and } \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log N \mathfrak{p}}{\sqrt{N} \mathfrak{p}^n} \{ \chi(\mathfrak{p}^n) F(\log N \mathfrak{p}^n) + \chi(\mathfrak{p}^{-n}) F(\log N \mathfrak{p}^{-n}) \} :$$

The usual explicit formulas are obtained by taking χ as the „Größencharakter“ which is identically 1 and choosing F as the particular function which is 0 for $x < 0$, $1/2$ for $x = 0$, $e^{x/2}$ for $0 < x < \log X$, $\frac{1}{2} X^{1/2}$ for $x = \log X$, and 0 for $x > \log X$, where X is some positive number.

P. T. Bateman.

Kubilyus, I. P.: Über einige Probleme der Geometrie der Primzahlen. Mat. Sbornik, n. Ser. **31** (73), 507—542 (1952) [Russisch].

The author continues the work of Hecke [Math. Z. **6**, 11—51 (1920)] and Rademacher (this Zbl. **11**, 55; **11**, 150; **14**, 342) on the geometrical distribution of the prime ideal numbers of an algebraic number field. The paper is divided into three main parts. In the first part the author improves the results of Hecke and Rademacher by considering more general regions. In the second part he uses Vinogradov's estimations of trigonometrical sums to sharpen the error terms in the case of imaginary quadratic fields. In the third part he applies in addition the density method of Linnik to the problem of the angular distribution of the prime ideal numbers of an imaginary quadratic field. The results of this last part have been announced earlier (this Zbl. **42**, 271).

P. T. Bateman.

Davenport, H.: Recent progress in the geometry of numbers. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **1**, 166—174 (1952).

This address gives an account of a selection of some of the developments in the Geometry of Numbers since 1936. The results mentioned are explained clearly and appropriate references are given. A few rather deep problems are mentioned.

C. A. Rogers.

Avadhani, T. V.: On summation over lattice points. J. Indian math. Soc., n. Ser. **16**, 103—125 (1952).

Let $r_k(n, h) = \sum \exp \{2\pi i(n_1 h_1 + \dots + n_k h_k)\}$, where $h = (h_1, \dots, h_k)$, and the summation extends over all lattice points on the sphere $n_1^2 + \dots + n_k^2 = n$. The author studies the Riesz summability, ordinary or absolute, of the series

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\sigma} r_k(n, h)$, and (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\sigma} J_{\nu}(2\pi \xi \sqrt{n}) r_k(n, h)$, where σ and ξ are real

and J_{ν} is the Bessel function. It is proved that if $\sigma > 0$, and h is not a lattice point, then series (i) is summable (n, α) for $\alpha > 2\sigma + (k-1)/2$. If $[\sigma + \nu/2] \geq \nu/2 + 1/4$, h is not a lattice point, and $0 \neq \xi^2 \neq (n_1 + h_1)^2 + \dots + (n_k + h_k)^2$, for all integral values of (n_k) , then series (ii) is summable (n, α) for $\alpha > 2\sigma + k/2 - 1$, while if h is a lattice point, series (ii) is summable (n, α) for $\alpha > 2\sigma + k - 3/2$. These results are related to some of the results of S. Bochner and the reviewer (this Zbl. **39**, 40; **41**, 372), but the methods of approach are different. The author then considers the case when σ is negative. Finally he gives the analogues for absolute summability.

K. Chandrasekharan.

Analysis.

● **Alexandroff (Aleksandrov), P. S., A. I. Markuševič und A. Ja. Chinčhin (Unter Redaktion von):** Enzyklopädie der Elementarmathematik. Bd. III: Funktionen und Grenzwerte (Grundlagen der Analysis). (Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der RSFSR.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 559 S. R. 13,10 [Russisch].

Der vorliegende Band III, Analysis, der Russischen Enzyklopädie der Elementarmathematik darf als ein sehr schön angelegtes und gut durchgeführtes Werk hervorgehoben werden. Der Stoff wird in seinem Rahmen von klassischen Wegen her bis zu modernen Begriffsbildungen sorgfältig und übersichtlich durchgeführt; zahlreiche Beispiele, wiederholt mit glücklichem

Griff außerhalb des alltäglich Bekannten gewählt, und viele gute Figuren bringen didaktisch wertvolle Hilfen. Der Stoff bleibt unterhalb der Taylorsche Formel; die elementaren Transzendenten werden also durch besonderes Vorgehen erreicht. Andererseits erhebt sich der erste Teil (Gončarov: Elementare Funktionen bei reellen Veränderlichen; Grenzwerte von Folgen und Funktionen; allgemeiner Funktionsbegriff) zuletzt bis zur Einführung von metrischen und topologischen Räumen, von stetigen und homöomorphen Abbildungen. Im 2. Teil (Natanson: Ableitungen, Integrale, Reihen) findet man auch eine Einführung in das klassische Vorgehen zur Berechnung von e und π , der Logarithmen und der zyklometrischen Funktionen. Der 3. Teil (Gončarov: Elementare Funktionen einer komplexen Veränderlichen) hätte vielleicht gewonnen, wenn auch die elementaren rationalen Funktionen und Abbildungen eingehender behandelt worden wären; der Fundamentalsatz der Algebra bleibt außerhalb der Darstellung. Der Verf. beschränkt sich auf die Erörterung der elementaren Transzendenten und auf Hauptpunkte der Integralrechnung im Komplexen.

E. Ullrich.

● **Vlasov, A. K.:** Lehrgang der höheren Mathematik. Bd. I: Analytische Geometrie. Differential- und Integralrechnung (Erster Teil). Bd. II: Elemente der höheren Algebra. Differential- und Integralrechnung (Zweiter Teil). 5. verbess. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 475, 512 S. R. 11,40, 12,30. [Russisch].

Es handelt sich um die 5. Auflage eines zuerst 1914 erschienenen und an Studierende vor allem Technischer Hochschulen gerichteten Werkes; die letzten Abschnitte des 2. Bandes stammen von Glagolev, die Neuauflage ist von Rajkov überarbeitet. Den Hauptteilen beider Bände, die der Analysis etwa in dem Umfange gewidmet sind, wie er in der Kursvorlesung an Technischen Hochschulen jedenfalls gebracht wird, geht in Band I eine Einführung in die Analytische Geometrie, in Band II eine in die Elementare Algebra voraus. Anlage und Sprache des Werkes entspricht der Entstehungszeit, auch wenn die späteren Bearbeiter an dem klassisch gehaltenen Text erneuert haben. Es fehlen die Dinge ganz, die heute an Technischen Hochschulen zur Praktischen Mathematik vorgetragen werden. Die Schlußkapitel des II. Bandes betreffen etwas Differentialgeometrie und Lineare Differentialgleichungen im Reellen. Reichliches Übungsmaterial darf hervorgehoben werden.

E. Ullrich.

● **Sprague, A. H.:** Calculus. New York: The Ronald Press Company 1952. XI, 576 p. \$ 6,50.

● **Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja und César A. Trejo:** Analysis. Bd. I: Algebraische Analysis. Theorie der Gleichungen. Infinitesimalrechnung einer Veränderlichen. Buenos Aires: Editorial Kapelusz 1952. XXVII, 817 p. [Spanisch].

● **Dubisch, Roy:** The nature of number. New York: The Ronald Press Company 1952. XII, 159 p. \$ 4,00.

Eine populäre Einführung in den Zahlbegriff mit einem Ausblick auf die moderne lineare Algebra. Das Buch enthält auch Skizzen über die historische Entwicklung. Verf. schließt sich der (weitverbreiteten) Meinung an, daß es nur abstrakte Mathematik gäbe, und „definiert“ daher die Grundzahlen durch das Dedekind-Peanosche Axiomensystem. Die dabei benutzte Logik und Mengenlehre wird stillschweigend übergangen.

P. Lorenzen.

Mengenlehre:

Farah, Edison: Über die totale Ordnung der Menge der Mächtigkeiten der Teilmengen einer gegebenen Menge. Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 5, 59—61 (1952) [Portugiesisch].

Démonstration directe, au moyen du théorème de Zorn, de la proposition suivante (qu'on déduit souvent de la possibilité de bien ordonner un ensemble quelconque): *E* et *F* étant deux ensembles, il existe toujours ou une application biunivoque de *E* sur une partie de *F*, ou une application biunivoque de *F* sur une partie de *E*.

R. de Possel.

Eyraud, Henri: Ensembles agrégatifs adjoints. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 15, 5—16 (1952).

Verf. betrachtet unendliche Teilmengen $f = \{a_1, a_2, \dots\}$ der Menge F der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ..., die er arithmetische Funktionen nennt oder auch kurz Funktionen. Die in zwei früheren Arbeiten [Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 14, 5—28, 119—148 (1951)] definierten Begriffe Teiler und Vielfaches übertragen sich auf diese speziellen Funktionen; Vereinigung und Durchschnitt nehmen jetzt rein mengentheoretischen Sinn an: f_1 und f_2 gelten wieder als gleichwertig, wenn $f_1 - f_2$ und $f_2 - f_1$ beide endlich sind. Neu hinzu kommt die Möglichkeit der Komplementbildung $F - f$. Verf. interessiert sich nur für solche f , deren Komplement $F - f$ ebenfalls unendlich ist. Prim heißen f_1 und f_2 , wenn ihr Durchschnitt endlich ist. — Ist A eine aggregative Menge von Funktionen f mit unendlichen Komplementen $F - f$, so ist die Menge B der $g = F - f$, $f \in A$, intersektiv und umgekehrt. A heißt dabei komplett, wenn jede Funktion entweder zu A oder zu B gehört (B ist dann die Basis eines Ultrafilters in F , der aus lauter unendlichen Mengen besteht. Ref.). — Als die Vereinigung zweier aggregativer Mengen A, A' gilt die aggregative Menge, die aus allen $f \in A$, $f' \in A'$ und ihren Vereinigungen $f \cup f'$ besteht; sie wird mit (A, A') bezeichnet. Es heißt, daß A und A' aggregieren, wenn (A, A') nicht die Menge F enthält. — Auf Grund der Hypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (die er als bewiesen ansieht), glaubt Verf. die aggregativen Mengen A mit $F \in A$ in vier Klassen einteilen zu können. 1. A besteht aus den Teilern einer einzigen Funktion f . 2. Es gibt eine ω -Folge $u = \{f_1, f_2, \dots\}$ mit $f_n < f_{n+1}$ (l. c., p. 5—28), so daß A aus den Teilern der f_n besteht. 3. A besteht aus den Teilern der f_ν einer ω_1 -Folge $\{f_\nu\}_{\nu < \omega_1}$, wobei $f_\nu < f_\mu$ für $\nu < \mu$ gilt. 4. Es gibt eine ω_1 -Folge $\{u_\nu\}_{\nu < \omega_1}$ von ω -Folgen $u_\nu = \{f_1^{(\nu)}, f_2^{(\nu)}, \dots\}$ mit $f_n^{(\nu)} < f_{n+1}^{(\nu)}$, und A besteht aus den Teilern der $f_n^{(\nu)}$. — Entsprechende Einteilung für die intersektiven Mengen B . — Ist A aggregativ, so heißt die Menge A' der Funktionen, die zu allen $f \in A$ prim sind, zu A adjungiert; A' ist wieder aggregativ. (A') umfaßt A , aber i. a. ist $A \neq (A')$. Verf. zeigt, daß A' zur ersten Klasse gehören kann, ohne daß A zur ersten Klasse gehört. Wenn A komplett ist, ist A' leer, aber das Umgekehrte braucht nicht zu gelten (letzteres ist auch ohne Kontinuumsannahme beweisbar. Ref.). — Das Hauptanliegen des Verf. ist der Beweis des Satzes: Ist A aggregativ von der 2., 3. oder 4. Klasse, so ist (A, A') niemals komplett [daß (A, A') nicht die Menge F enthält, liegt auf der Hand]. Ref. gesteht, daß ihm die Beweise nicht in allen Punkten klar geworden sind.

W. Neumer.

Moneta, J.: Réurrence transfinie de 1^{re} classe. Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A 15, 17—25 (1952).

Verf. sucht zu beweisen, daß $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ist. Der Trugschluß ist trivial; es läßt sich aus ihm nicht einmal eine mit obiger Hypothese gleichwertige ableiten.

W. Neumer.

● **Denjoy, Arnaud: L'énumération transfinie. Livre I: La notion de rang.** Paris: Gauthier-Villars 1946. 206 p. 1000 Fr.

Kapitelüberschriften des ersten Buches: I. L'ordination des ensembles. II. Les nombres ordinaux. III. Représentations numérique et géométrique des ordinations du dénombrable. — In den ersten zehn §§ des ersten Kapitels behandelt Verf. die geordneten Mengen im allgemeinen. Bemerkenswert ist die in § 10 gegebene Abbildung des r -dimensionalen reellen euklidischen Raumes U_r auf das Innere der r -dimensionalen Einheitskugel S_r , welche es gestattet, die Lücken des lexikographisch geordneten U_r in seinem Bilde S_r durch die Randpunkte von S_r (zwei Randpunkte ausgenommen) zu schließen. — Die §§ 11—17 sind den linearen Mengen gewidmet, wobei der Begriff der Regularität eine Rolle spielt; eine lineare Menge H heißt auf dem offenen Intervall $-\infty \leq \alpha < x < \beta \leq +\infty$ regulär, wenn $H \subset (\alpha, \beta)$ und wenn H ihre einseitigen geometrischen Häufungspunkte $P \in (\alpha, \beta)$ enthält. — Den Schluß des ersten Kapitels bilden die §§ 18—33, welche die allgemeine Theorie der wohlgeordneten Mengen zum Inhalt haben. — Das II. Kapitel (§§ 34—64) ist im wesentlichen der Theorie der Ordnungszahlen gewidmet, welche bis zur Cantorschen Polynomdarstellung $\alpha = \sum_{i=1}^n \omega^{\nu_i} p_i$ (§ 50) und dem Begriff der Zahlenklassen (§ 51)

entwickelt wird. — Eine Ordnungszahl ist für den Verf. ein fest gewähltes Zeichen für einen „Rang“; 1 ist die erste Ordnungszahl. Im Gegensatz zu Cantor läßt Verf. innerhalb der Theorie der Ordnungszahlen die 0 nur als fiktives Element gelten. Ferner polemisiert er gegen die seiner Meinung nach von Cantor stillschweigend vorgenommene Identifizierung von „Rang“ und „Wohlordnungstypus“; er schreibt τ_α für einen Wohlordnungstypus vom Rang α , wo man sonst nach Cantors Vorgang sich mit dem Zeichen α für beides begnügt. — $\alpha + \beta$ und $\alpha \beta$ werden als die Ränge von $\tau_\alpha + \tau_\beta$ und $\tau_\alpha \tau_\beta$ in der wohlgeordneten „Menge“ $\{\tau_\gamma\}$ der Wohlordnungstypen definiert (§§ 44—48). — Es folgen Betrachtungen kritischer Art über die „Realität“ der Ordnungszahlen höherer als der zweiten Zahlenklasse und über den Sinn des Zermeloschen Wohlordnungssatzes (§§ 52—54 sowie Fußnote auf S. 206). — In den §§ 57—62 behandelt Verf. die gestuften

Mengen („ensembles rangés“) als Verallgemeinerung der wohlgeordneten. Eine geordnete Menge heißt gestuft, wenn zwei verschiedene ihrer Anfangsstücke niemals ähnlich sind. [Mengen dieser Art hat schon Hausdorff behandelt, der ihnen auch den Namen „gestuft“ gegeben hat; vgl. Ber. Verhdl. Sächs. Ges. Wiss., Leipzig, 53 460—475 (1901).] — Im dritten Kapitel entwickelt Verf. die Grundlagen für das vierte (s. nachstehendes Referat). Unter einer Permutation P der Menge (N) der ihrer Größe nach geordneten natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$ versteht Verf. eine beliebige Anordnung der natürlichen Zahlen zu einer geordneten Menge P . P heißt elementar, wenn sie vom Typus $T(P) = \tau_\omega$ ($= \omega$ nach Cantor) ist, andernfalls komplex. Sind P und Q ähnliche Permutationen vom (N) , d. h. $T(P) = T(Q)$, so erhält man Q , indem man mit einer bestimmten elementaren Permutation $P_e = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ die entsprechende Umformung vornimmt, welche (N) in P verwandelt hat. — Bezeichnet man mit e_n die gemäß P geordnete Menge der Zahlen $1, 2, \dots, n$, mit e'_n die um 0 als erstes Element ($0 < i$ für $i \in e_n$) vermehrte Menge e_n , dann wird P festgelegt, indem man sukzessive für $n = 1, 2, \dots$ die Zahl a_n angibt, welcher n in e'_n unmittelbar nachfolgt. Man erhält so als Äquivalent von P eine arithmetische Funktion a_n , wo $0 \leq a_n \leq n-1$. — Jede irrationale Zahl $x \in (0,1)$ läßt sich in genau eine

Reihe $x = E(a_1, a_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$ entwickeln, wo $a_1 = 0$ und $0 \leq a_n \leq n-1$ für $n \geq 2$.

Umgekehrt stellt jede solche Reihe ein $x \in [0,1]$ dar. Für rationales $x \in (0,1)$ gibt es zwei Entwicklungen. — Die Koeffizienten a_n heißen die Ziffern der Entwicklung $E(a_1, a_2, \dots)$ („développement népérien“). Jedem $E(a_1, a_2, \dots)$ kann man eindeutig eine Permutation P zuordnen. Jedes irrationale $x \in (0,1)$ liefert genau eine, jedes rationale $x \in (0,1)$ genau zwei Permutationen. — Gewissen ordinalen Eigenschaften einer Permutation P entsprechen gewisse arithmetische Eigenschaften der zugehörigen Ziffernfolge a_n . Insbesondere läßt sich eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür angeben, daß $E(a_1, a_2, \dots)$ eine wohlgeordnete Permutation liefert. Die Menge der $x \in (0,1)$ mit solcher Ziffernfolge a_n ist analytisch. — Eine Permutation P läßt sich durch ein abzählbares System A von „übereinander“ angeordneten unendlichen Streckenzügen L_n repräsentieren. In P gilt $n < n'$, wenn in A die Linie L_n „unterhalb“ der Linie $L_{n'}$ verläuft und umgekehrt. Die Struktur dieser Systeme wird eingehend untersucht und zu den arithmetischen Eigenschaften der dargestellten Permutation in Beziehung gebracht.

W. Neumer.

• Denjoy, Arnaud: L'énumération transfinie. Livre II: L'arithmétisation du transfini. 1^{ère} partie: Les permutations spéciales. Paris: Gauthier-Villars 1952. p. 207—433. 3000 Fr.

Das zweite Buch zerfällt in die Kapitel IV und V, welche den 1. und 2. Teil des Buches bilden. Das V. Kapitel behandelt ein spezifisches Problem der zweiten Zahlenklasse mit rein „ordinalen“ Mitteln (s. nachstehendes Referat), während das IV. tatsächlich dem Thema „L'arithmétisation du transfini“ gewidmet ist. Das vierte Kapitel ist — im Gegensatz zum fünften, das nur die das Gesamtwerk durchziehende §-Einteilung aufweist — in relativ selbständige Abschnitte („sections“) gegliedert. — Überschriften: Section I. L'addition conventionnelle et figurée des permutations. — Section II. Détermination des permutations spéciales ou clivées par des familles des suites finies d'entiers positifs. — Section III. Formation des types ordinaux de la classe II non préconçus. — Section IV. Représentation arithmétique d'une permutation clivée. — Ein Résumé des IV. und V. Kapitels findet sich am Schluß des zweiten Teils des zweiten Buches. — Der erste Abschnitt verallgemeinert die im III. Kapitel eingeführten Liensysteme A , die jetzt als normale bezeichnet werden. Damit ein auf kartesische Koordinaten (i, r) bezogenes System (λ) von abzählbar vielen „übereinander“ angeordneten Linien eine Permutation P darstelle, muß es gewisse Bedingungen erfüllen. $T((\lambda)) = T(P)$ bezeichne den Ordnungstypus von (λ) . Sind die höchstens abzählbar vielen Systeme (λ_k) ($k = 1, 2, \dots$) in gewisser Weise „übereinander“ angeordnet, so repräsentiert auch $(\lambda) = \bigcup_k (\lambda_k)$ eine Permutation, wobei

$T(\lambda) = \sum_k T((\lambda_k))$ ist im Sinne der geordneten Addition von Ordnungstypen. — Verf. ent-

wickelt u. a. ein kanonisches Verfahren, um die „Summe“ abzählbar vieler A_k und damit der zugehörigen Permutationen P_k als ein neues A bzw. P zu definieren. Dabei werden die A_k deformiert und übereinander placiert, so daß abzählbar viele fremde Systeme (σ_k) entstehen und $(\sigma) = \bigcup_k (\sigma_k)$ eine mit $P = \sum_k P_k$ bezeichnete Permutation darstellt; es gilt $T(P) =$

$\sum_{k=1}^{\infty} (T(P_k) + 1)$. Verf. fügt nämlich für $k \geq 2$ zu den ursprünglichen Linien s_{kj} ($j = 1, 2, \dots$) von (σ_k) noch eine „Basis“ $s_{k0} < s_{kj}$, $j > 0$, hinzu. In (σ) gilt $s_{kj} < s_{k'j'}$, falls $k < k'$ oder $k = k'$ und $s_{kj} < s_{kj'}$ in (σ_k) ist. Die gemäß dem Diagonalverfahren erfolgende Abzählung von $(\sigma) = \{s_{kj}\}$ ($k \geq 1, j \geq 0$ für $k \geq 2$ und $j \geq 1$ für $k = 1$) erteilt der Linie s_{kj} die Nummer $(1^*) n = f_1(k/j) = \frac{1}{2}(k+j)(k+j-1) + j$. Die Ziffern a_n der Permutation P sind durch $(2^*) a_n = f_1(k/a_{kj})$ gegeben, unter a_{kj} die Ziffern von P_k verstanden. — Verwandelt man (σ)

in ein normales System $A = A(P)$ von Linien L_n , so geht s_{kj} gemäß (1*) in L_n über. Die s_{k0} ($k \geq 2$) werden die Linien $L_{n_{k-1}}, n_{k-1} = f_1(k/0)$, welche nur von k und nicht von den P_k abhängig sind; sie zerfallen A in Teilsysteme, welche die P_k repräsentieren. — Dieser Umstand veranlaßt die Definition: P heißt eine zerfallende Permutation („permutation clivée“), wenn entweder $P = (N)$ oder $P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$ im eben erklärten Sinne ist, wobei die P_k wiederum zerfallend sind. P ist genau dann wohlgeordnet, wenn jede unendliche Folge k_1, k_2, \dots natürlicher Zahlen einen Abschnitt k_1, \dots, k_p hat, so daß $P_{k_1 \dots k_p} = (N)$ wird $\left(P_{k_1 = \sum_{k_2=1}^{\infty} P_{k_1 k_2} \text{ usw.}} \right)$. Falls außerdem noch $P \neq (N)$, also $T(P) = \omega^2 \beta$ ist, heißt P „spéciale“. — Zu jedem $\alpha < \Omega$ läßt sich eine kanonische Permutation P^α mit $\alpha = T(P^\alpha)$ angeben, wenn man für die Limeszahlen $\alpha < \Omega$ kanonische Folgen $\alpha_k \rightarrow \alpha$ definieren kann; z. B. wird $P^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} P^{\alpha_k}$ für $\alpha = \omega^\nu > \omega$.

Es wird $P^\omega = (N)$, $\omega = \lim \{1, 2, \dots\}$ gewählt. — Die Formel (1*) legt folgende Darstellung der natürlichen Zahlen nahe. Für $n \geq 1$ gibt es genau zwei ganze Zahlen $k_1 \geq 1, j_1 \geq 0$ mit $k_1 + j_1 \geq 2$, so daß $n = f_1(k_1/j_1)$ wird. Setzt man, falls $j_1 > 0$, hierin $j_1 = f_1(k_2/j_2)$ ein usw., so erhält man für n die pte Spezialform $n = f_p(k_1, \dots, k_p/j_p)$ ($p = 1, 2, \dots$) mit $k_1 \geq 1, \dots, k_p \geq 1, j_p \geq 0, k_p + j_p \geq 2$. Das Verfahren bricht ab mit dem ersten $j_r = 0$; $n = f_r(k_1, \dots, k_r/0)$, $k_r \geq 2$, heißt die maximale Spezialform von n . Für $n \geq 5$ gilt: (3*) r ist „ungefähr“ $< \log(\log n)/\log 2$. — $f_p(k_1, \dots, k_p/0)$ ist für $k_p = 1$ keine Spezialform mehr, stellt aber immer noch eine ganze Zahl dar, nämlich $f_{p-1}(k_1, \dots, k_{p-1}/0)$, da $f_1(1/0) = 0$. — Als nullte Spezialform für $n \geq 1$ gilt n selbst, geschrieben $n = f_0(n)$. — Zweiter Abschnitt: Die Spezialformen ermöglichen eine neue arithmetische Darstellung für die zerfallenden Permutationen. Eine — u. U. leere — Familie G endlicher Folgen $S = (k_1, \dots, k_p)$ von natürlichen Zahlen heißt progressiv, wenn mit S auch alle Abschnitte S' von S zu G gehören. $S \in G$ heißt offen oder geschlossen in G , je nachdem S Abschnitt eines $S' \in G$ ist oder nicht. — $\Phi(G)$ bedeute die Menge der folgenden Spezialformen: 1. $f_p(S/0)$, wenn $S = (k_1, \dots, k_p) \in G$ und $k_p \geq 2$. — 2. $f_p(S/j)$, $j \geq 1$, wenn S geschlossen ist in G . — Für leeres G besteht $\Phi(G)$ aus den $f_0(j)$, $j \geq 1$. — Die Zahlenwerte $f_p(S/j) \in \Phi(G)$ sind paarweise verschieden; ihre Menge sei $\Psi(G)$. — $\Psi(G)$ ist genau dann die Menge aller natürlichen Zahlen, wenn G eine gewisse Bedingung (A) erfüllt. — Jede Familie G mit der Eigenschaft (A) induziert eine Permutation $P = P(G)$ durch die Festsetzung: Es gelte $n = f_p(k_1, \dots, k_p/j) < n' = f_{p'}(k'_1, \dots, k'_{p'}/j')$ für zwei Formen aus $\Phi(G)$, wenn im lexikographischen Sinne $(k_1, \dots, k_p, j) \leq (k'_1, \dots, k'_{p'}, j')$ ist. Damit ist die Menge $\Psi(G)$ aller natürlichen Zahlen gemäß $n < n'$ geordnet. — Die so definierten $P(G)$ werden untersucht und als mit den zerfallenden Permutationen identisch nachgewiesen. — Falls G leer, ist $P(G) = P^\omega = (N)$. — $P(G)$ ist genau dann wohlgeordnet, also im Fall $P(G) \neq (N)$ „spéciale“, wenn G einer gewissen Forderung (B) genügt. — Der dritte Abschnitt unternimmt es, auf rein arithmetischem Wege, mittels gewisser Familien von endlichen Folgen natürlicher Zahlen, Ordnungszahlen $\alpha < \Omega$ zu definieren, deren Platz in der aufsteigenden Reihe von Ordnungszahlen praktisch unbestimmbar ist, die also in „ordinaler“ Hinsicht völlig unbekannt bleiben. — Der vierte Abschnitt untersucht u. a. diejenigen Entwicklungen $E(a_1, a_2, \dots)$, aus denen zerfallende Permutationen $P(G)$ hervorgehen. Ist $n = f_p(S/j) \in \Phi(G)$ mit $S = (k_1, \dots, k_p) \in G$, so gilt (4*) $a_n = f_p(k_1, \dots, k_p/j-1)$ für $j \geq 1$, $a_n = f_p(k_1, \dots, k_{p-1}, k_p-1/0)$ für $j = 0$, $k_p \geq 2$. — Wenn $n = f_r(k_1, \dots, k_r/0)$ die maximale Spezialform von n ist, so folgt aus (4*), daß in sämtlichen zerfallenden Permutationen $P \neq (N)$ für jedes n die Ziffer a_n nur unter $r = r(n)$ bestimmten, von P unabhängigen Werten gesucht werden darf. Die Abschätzung (3*) zeigt, daß unter den Entwicklungen $E(a_1, a_2, \dots)$ diejenigen, welche zerfallende Permutationen liefern, sehr „rar“ sind, was später näher präzisiert wird. Überhaupt stellt sich heraus, daß die Ziffern a_n einer zerfallenden Permutation eng miteinander verknüpft sind. — Die Menge Z_0 der Zahlen x zwischen 0 und 1, deren Reihenentwicklung $x = E(a_1, a_2, \dots)$ eine zerfallende Permutation ergibt, wird als perfektes Diskontinuum vom Maß 0 nachgewiesen.

W. Neumer.

● Denjoy, Arnaud: L'énumération transfinie. Livre II: L'arithmétisation du transfini. 2^{ième} partie: Les suites canoniques. Paris: Gauthier-Villars 1952. p. 439—614. 2500 Fr.

Mit Φ bezeichnet Verf. das Problem, jeder Limeszahl α der zweiten Zahlenklasse eine „kanonische“ Folge wachsender Zahlen $\alpha_n \rightarrow \alpha$ zuzuordnen. Sei $\varphi(\gamma)$, $1 \leq \gamma < \Omega$, eine stetige wachsende Folge von Zahlen $< \Omega$. Eine Sukzession $\varphi_\delta(\gamma)$, $1 \leq \delta < \Omega$, von solchen Folgen heißt regulär, wenn $\varphi_{\delta+1}$ Teilfolge von φ_δ ist, ohne $\varphi_\delta(1)$ zu enthalten, und wenn für eine Limeszahl δ die Folge φ_δ der Durchschnitt aller $\varphi_{\delta'}$ mit $\delta' < \delta$ ist. — Die Iterierten $\varphi^{(\delta)}(\gamma)$ einer Folge $\varphi(\gamma)$ mit $\varphi(1) > 1$ werden durch $\varphi^{(1)}(\gamma) = \varphi(\gamma)$, $\varphi^{(\delta+1)}(\gamma) = \varphi^{(\delta)}(\varphi(\gamma))$ definiert, indem verlangt wird, daß die Sukzession der $\varphi^{(\delta)}$ regulär sei. $\varphi^{(1+\delta)}$ heißt die Iterierte der Ordnung δ von φ . Als die Iterierte der Ordnung Ω von φ wird die Folge $\varphi^{(\Omega)}(\gamma) = \{\varphi^{(\delta)}(1)\}_{1 \leq \delta < \Omega}$ bezeichnet. —

Die kritischen Zahlen $\mu = \varphi(\mu)$ von $\varphi(\gamma)$ bezeichnet Verf. als Knoten („nœuds“) und die Folge aller μ als Knotenlinie („nodale“) von φ . Es werden Knotenlinien beliebiger Ordnung $\delta < \Omega$ von φ definiert und mit $\varphi_{1+\delta}$ bezeichnet; dabei ist $\varphi_1(\gamma) = \varphi(\gamma)$, $\varphi_{\delta+1}$ die Knotenlinie von φ_δ , und die φ_δ bilden eine reguläre Sukzession. Es gilt $\varphi_{1+\delta} = \varphi^{(\omega^\delta)}$. Die Folge der φ_δ ($1, 1 \leq \delta < \Omega$), heißt die Knotenlinie φ_Ω der Ordnung Ω von φ . — Zur Behandlung des Problems Φ führt Verf. schrittweise eine Reihe von Postulaten ein (deren Widerspruchsfreiheit noch explizit nachzuweisen wäre), von denen das erste nur formale Bedeutung hat und das zweite besagt, daß ω die kanonische Folge 1, 2, 3, ... haben soll. — Unter einer Hauptfolge wird eine Folge $\varphi(\gamma)$ wie oben verstanden, welche die drei Eigenschaften besitzt: (a) Für eine Limeszahl $\gamma < \varphi(\gamma)$ ist $\varphi(\gamma_n)$ die kanonische Folge von $\varphi(\gamma)$, wenn γ_n die kanonische Folge von γ ist. (b) Alle φ_δ ($1 \leq \delta < \Omega$) sind Hauptfolgen. (c) Die kanonische Folge von $\varphi_2(1) = \varphi^{(\omega)}(1)$ ist $\varphi^{(n)}(1)$; ist $\alpha > \varphi_2(1)$ eine Limeszahl und ein isolierter Knoten von φ , d. h. $\alpha = \varphi_2(\theta + 1)$, also $\beta = \varphi_2(\theta)$ der vorhergehende Knoten, so ist $\varphi^{(n)}(\beta + 1)$ die kanonische Folge zu α . — Eine stetige wachsende Folge von Zahlen $< \Omega$ heißt Halb-Hauptfolge, wenn sie ein letztes Glied hat (also auch abzählbar ist) und die Eigenschaft (a) aufweist. — Postulat III. Die Folge $S(1) = \{\omega + \gamma\}_{0 \leq \gamma < \varphi}$ ist eine Hauptfolge. — Verf. entwickelt die Idee eines Systems von Hauptfolgen $S(U)$, wo der Index $U \geq 1$ die Ordnungszahlen unterhalb einer mit Ω konfinalen Zahl \mathfrak{U} der dritten Zahlenklasse durchläuft, über deren Beschaffenheit nichts ausgesagt werden kann. — $S(U + 1)$ ist die Knotenlinie von $S(U)$. — Wenn U cf ω bzw. cf Ω , so sei $\sigma_0(U)$ bzw. $\Sigma_0(U)$ die Sukzession derjenigen $S(Z)$ mit $Z < U$, welche die Eigenschaft haben, daß $S(Z) \supset S(U')$ ist für $Z < U' < U$. — Postulat IV. Ist U cf ω und sind alle $S(U')$, $U' < U$, definiert, so existiert $S(U)$ genau dann, wenn $U = \lim_{\gamma < \varphi} Z_\gamma$, wo $\sigma_0(U) = \{S(Z_\gamma)\}_{1 \leq \gamma < \varphi}$, und $S(U)$ ist der Durchschnitt der $S(Z_\gamma)$. — $S(U)$ heißt Basis, wenn $U = \Omega \cdot V \geq \Omega$, und zwar Basis erster oder zweiter Kategorie, je nachdem U cf ω oder cf Ω ist. — $S(U + 1)$ heißt fundamental, wenn $U = 1$ oder $= \Omega \cdot V$ ist. — Sei $U = \lim U^v$, $1 \leq v < \Omega$ und $S(U^1)$ fundamental. Die Sukzession der $S(U^v) = \varphi^v(\gamma)$ heißt kanonisch und wird mit $\Sigma(U)$ bezeichnet, wenn die Bedingungen erfüllt sind: 1. $S(U^v) \supset S(U')$ für $U^v < U' < U$ [also $\Sigma(U) \subset \Sigma_0(U)$]. 2. $\Sigma(U)$ ist regulär. 3. Wenn θ cf ω , $\theta < \Omega$ und α entweder das erste Glied von $S(U^\theta) = \varphi^\theta(\gamma)$ oder ein isoliertes Glied dieser Folge mit dem Vorgänger β ist, so ist nach Hinzufügung von α als Schlußglied die Folge $\varphi^v(1)$ oder $\varphi^v(\beta + 1)$, $1 \leq v < \theta$, eine Halb-Hauptfolge. — Postulat V. Sei U cf Ω , und seien alle $S(U')$, $U' < U$, definiert. Dann ist $\Sigma(U) = \{S(U^v)\}$, $1 \leq v < \Omega$, eindeutig bestimmt, und die Basis $S(U)$ ist die Folge $\{i(U^v)\}$, $1 \leq v < \Omega$, unter $i(U)$ allgemein das erste Glied von $S(U)$ verstanden. — Analog soll jeder Hauptfolge $S(V)$ mit V cf ω eine halbkanonische Sukzession $\sigma(V) = \{S(V^v)\}$, $1 \leq v < \theta$ mit $V^v \rightarrow V$ entsprechen, die ähnliche Eigenschaften wie $\Sigma(U)$ hat. — Postulat VI. Die Sukzession, die von einer fundamentalen Hauptfolge und ihren Knotenlinien aller Ordnungen $< \Omega$ gebildet wird, ist kanonisch. — Es ergibt sich, daß zwei Folgen $S(U)$ und $S(V)$ mit $U \neq V$ auch verschiedene zweite Glieder haben, woraus folgt, daß das System der $S(U)$ tatsächlich von einem Typus $\mathfrak{U} < \Omega^* = \omega_2$, \mathfrak{U} cf Ω , ist. — Es wird gezeigt, daß zu einem U cf ω , bei definierten $S(U')$ für $U' < U$, die Sukzession $\sigma_0(U) = \{S(Z_v)\}$, $1 \leq v < \theta$ die Eigenschaften θ cf ω , $\theta < \Omega$ und $Z_v \rightarrow U$ hat. Also existiert $S(U)$ nach Postulat IV. $S(U)$ heißt normal, wenn stets $i(Z_v) < i(U)$ ist; andernfalls ist $S(U)$ eine „Ausnahme“-Basis. — $E(U, j)$ bedeute die Menge der $S(Z_v)$ mit $i(Z_v) = j$, wenn $\sigma_0(U)$ bzw. $\Sigma_0(U)$ aus den $S(Z_v)$ besteht. — Postulat VII. Ist $S(U)$ eine Ausnahmebasis, $i(U) = g$, so ist $\sigma(U)$ das Endstück $E(U, g)$ von $\sigma_0(U)$. — Ist $S(U)$ normal (U cf ω) oder eine Basis zweiter Kategorie (U cf Ω), so bedeute $\sigma'_0(U)$ bzw. $\Sigma'_0(U)$ die Sukzession der ersten Folgen der Mengen $E(U, j)$, worin j die Menge der verschiedenen $i(Z_v)$ durchläuft. — Postulat VIII. Die Sukzession $\Sigma(U)$ oder $\sigma(U)$ bezüglich einer nicht isolierten Basis $S(U)$ von zweiter Kategorie ($U = \Omega V$, V cf Ω) oder einer normalen Basis $S(U)$ erster Kategorie ($U = \Omega V$, V cf ω) ist Teil von $\Sigma'_0(U)$ bzw. $\sigma'_0(U)$. — Postulat IX. Zu jeder normalen Folge $S(U)$ (U cf ω) existiert eine Basis zweiter Kategorie $S(X)$, $X > U$, so daß $S(U) \in \Sigma(X)$ und $\sigma(U)$ der durch $S(U)$ bestimmte Abschnitt von $\Sigma(X)$ ist. — Postulat X. $\Sigma(U)$ ist ein Endstück von $\Sigma'_0(U)$, dessen zugehöriges Anfangsstück ein letztes Element hat. — Das durch die Postulate I bis X bis auf die Bestimmung der $S(U^1)$ der $\Sigma(U)$ festgelegte System der Hauptfolgen $S(U)$ gestattet hinsichtlich des Problems Φ folgende Aussagen, wenn man die kanonische Folge α_n von α reduziert nennt, falls sie auf Grund der Kenntnis der kanonischen Folge α'_n eines $\alpha' < \alpha$ definiert werden kann. Ist die Basis $S(U)$ zugleich mit allen $S(U')$, $U' < U$, bekannt, so sind die kanonischen Folgen aller Limeszahlen $< \Omega$ bekannt oder reduziert, ausgenommen die folgenden: 1. Die Glieder von $S(U + 1)$. 2. Die ersten Glieder derjenigen normalen Basen $S(V)$ mit $V < U$, die noch keiner kanonischen Sukzession eingeordnet sind. 3. Die möglicherweise existierenden kritischen Zahlen aller Folgen $\varphi^v(2)$, wo die $\varphi^v(\gamma) = S(V^v)$ gewisse Ausnahmebasen sind, welche das erste Glied $g = i(V^v)$ gemein haben und eine Sukzession $E(g)$ mit gewissen Eigenschaften bilden [es kann mehrere $E(g)$ geben]. Durch Übergänge zu immer größeren $U < \mathfrak{U}$ lassen sich die Ausnahmen 1. und 2. nach und nach erfassen; dagegen erfordern die unter 3. genannten Zahlen, deren Existenz eine offene Frage bleibt, zur Bestimmung ihrer kanonischen

Folgen neue Überlegungen. — In der Gewinnung der $S(U)$, insbesondere der $S(U^1)$, für die $\Sigma(U)$ kommt man über die „ersten Anfänge“ nur hinaus, wenn man in einem gewissen Umfang „ultra-kanonische“ Folgen für die mit Ω konfinalen Zahlen $U < \mathfrak{Y}$ angeben kann. Zur Lösung dieses Problems wäre wieder ein System von Ultrahauptfolgen $S^*(U^*)$ zu definieren, wo $U^* < \mathfrak{Y}^*$ (mit $\Omega^* < \mathfrak{Y}^* < \Omega^{**} = \omega_3$) bleibt. Diese Aufgabe wird vom Verf. in Umrissen skizziert und für die „ersten Schritte“ auch durchgeführt. (Anmerk. des Ref.: Das Problem Φ erscheint damit explizit etwa im selben Umfang gelöst wie bei H. Bachmann, dies. Zbl. 41, 21.) — Den Schluß bilden Überlegungen teilweise heuristischer Art darüber, mittels zusätzlicher Postulate das Auftreten der oben unter 3. genannten kritischen Zahlen zu verhindern sowie die noch offen gebliebene Bestimmung der $S(U^1)$ der $\Sigma(U)$ zu fixieren. W. Neumer.

Padmavally, K.: Generalization of rational numbers. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 249—265 (1952).

In questo lavoro vengono generalizzate alcune relazioni tra il tipo d'ordine η di tutti i numeri razionali e il tipo d'ordine θ di tutti i numeri reali dell'intervallo chiuso $0 \leq x \leq 1$. Fra i risultati stabiliti ci limitiamo a riportare il seguente che costituisce una generalizzazione della proprietà che η è denso in θ . Teorema. 1. Per ogni tipo d'ordine C e ogni ordinale limite α , $C[(\alpha)]$ ha un sottoinsieme denso simile a un sottoinsieme isolato di sè stesso. 2. Se inoltre il tipo d'ordine C ha un elemento massimo oppure uno minimo, $C[(\alpha)]$ ha un sottoinsieme denso appartenente a $P_{C[(\alpha)]}$ (α essendo un ordinale limite). L. Giuliano.

Ohkuma, Tadashi: On discrete homogeneous chains. Kodai math. Sem. Reports 1952, 23—30 (1952).

Eine homogene Kette (HK) ist nach Verf. eine total geordnete Menge mit transitiver Automorphismengruppe. Eine HK ist entweder im Sinne von Cantor in sich dicht, d. h. zwischen zwei verschiedenen Elementen liegt stets ein drittes, oder aber im Sinne des Verf. diskret, d. h. es gibt wenigstens ein Paar benachbarter Elemente; wegen der Homogenität besitzt dann jedes Element einen unteren und einen oberen Nachbarn. Verf. führt in eine HK X eine Äquivalenzrelation ein: $a \sim b$ genau dann, wenn die Menge der zwischen a und b liegenden Elemente endlich. Das ist sogar eine Kongruenzrelation K im Sinne des Ref. [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 56, 19—20 (1952)]; die Restklassen modulo K sind entweder alle einelementig — in sich dichter Fall — oder alle vom Typus J ($=$ HK der ganz-rationalen Zahlen) — diskreter Fall. Im diskreten Fall ist also X isomorph dem ordinalen Produkt $M \otimes J$, unter M die in natürlicher Weise geordnete Klasseneinteilung modulo K , X/K , verstanden. Die Isomorphiebeziehungen $X \cong M \otimes J$ und $M \cong X/K$ stellen eine (abgesehen von Isomorphie) eindeutige Entsprechung her zwischen diskreten HK X und beliebigen HK M ; dieser Satz des Verf. ordnet sich in die Resultate des Ref., loc. cit., ein. — Eine HK heißt nach Verf. absolut diskret, sofern jede homogene Teilmenge leer, einelementig oder diskret ist. Die absolut diskreten HK besitzen als einzige Invariante eine beliebige Ordinalzahl α ; man denke sich die zu α gehörende absolut diskrete HK, H_α , am einfachsten so realisiert: H_α sei die Menge aller fast überall verschwindenden Belegungen der ganzen Ordinalzahlreihe mit ganz-rationalen Zahlen, angeordnet nach dem Prinzip der letzten Differenzen. Anders ausgedrückt: H_α ist im wesentlichen nichts als die α -te Potenz von J (s. o.). — Dieses schöne Resultat stellt nach Ansicht des Ref. doch keine ausreichende Rechtfertigung für die eigenwillige Definition der ordinalen Potenz dar, die Verf. in einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 46, 278) gegeben hat. Jürgen Schmidt.

Morinaga, Kakutaro and Noboru Nishigōri: On axiom of betweenness. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 177—221 (1952).

Besprechung zusammen mit Teil II dieser Arbeit in dies. Zbl. 51, 38.

Benado, Mihail: Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de O. Schreier. Acad. Republ. popul. Române, Bull. Ști., Sect. Mat., Fiz. 4, 585—590 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 590, 590—591 (1952) [Rumänisch].

L'A. donne, dans cette Note introductive, une condition suffisante pour la validité du théorème de raffinement de Schreier dans un ensemble partiellement ordonné, arbitraire, extension comportant des applications à la théorie des structures, à la théorie de la divisibilité, etc. L'on pose la définition suivante: Un ensemble P partiellement ordonné satisfait à l'hypothèse H , lorsqu'il existe un élément ω_0 , tel que pour chaque quadrilatère de Dedekind ($\Omega, \omega_0; x, y$) il y ait des éléments $L, m \in P$, satisfaisant à $\Omega \geq L \geq x \geq m \geq \omega_0$, $\Omega \geq L \geq y \geq m \geq \omega_0$ et tels qu'il

y ait des isomorphismes (au sens de l'ordre partiel) $\eta, \tilde{\eta}$ suivants:

$$L/x \Leftrightarrow y/m \ (\eta), \quad L/y \Leftrightarrow x/m \ (\tilde{\eta}).$$

Le théorème de Schreier s'énonce alors: Deux chaînes (finies) aux extrémités communes $\Omega \geq \omega_0$, possèdent des raffinements isomorphes. *Al. Froda.*

Ribeiro de Albuquerque, José: Theorie der projektiven Mengen. I, II. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 1, 345—400 (1951), 2, 5—44 (1952) [Portugiesisch].

La prima parte di questo lavoro è dedicata a una rielaborazione e a una schematizzazione della teoria degli insiemi „analitici“ che vengono generati mediante l'operazione (A) di Suslin a partire da una famiglia iniziale. Una novità consiste nello sviluppo della teoria indipendentemente da ogni topologia dello spazio in cui si considerano gli insiemi. Si ritrovano e vengono generalizzate così tutte le proprietà formali (proprietà di accessibilità, separabilità, ecc. ecc.) della teoria degli insiemi di Borel sviluppate da Lusin nel volume „Leçons sur les ensembles analytiques“ (Paris 1930), e viene generalizzata ai σ -corpi B_n la classificazione di Baire-De La Vallée Poussin. Fra i teoremi stabiliti dall'A. nella seconda parte del lavoro ve n'è uno che contiene il classico risultato che la proiezione di un insieme di Borel è un insieme analitico. L'A. stabilisce poi anche per gli insiemi proiettivi di classe superiore alcuni teoremi importanti che sussistono per gli insiemi di Borel e analitici. Vengono poi costruiti gli insiemi universali col metodo di Lavrentieff. Il lavoro termina con la risoluzione di alcuni problemi posti da Lusin nel suo volume citato sopra. *L. Giuliano.*

Watanabe, Hideaki: L'uniformisation et la séparabilité des ensembles plans. II. Applications aux problèmes de l'uniformisation et de la séparabilité. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 257—263 (1952).

In Weiterführung der ersten Arbeit (dies. Zbl. 47, 57) werden „Uniformisierungs“- und Trennbarkeitssätze gegeben, z. T. im Anschluß an S. Braun, dies. Zbl. 16, 55, und mehrere Arbeiten von Lusin. *H. Hornich.*

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Cesari, L. and T. Radó: Applications of area theory in analysis. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 174—179 (1952).

Es handelt sich um eine Übersicht jener Resultate, welche sich bisher ergeben haben bei dem Bemühen, die Theorie der reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen auf die mehrerer zu übertragen, wobei auch für die dort so erfolgreichen Begriffe wie Derivierte, Integral, von beschränkter Variation, Absolut-Stetigkeit und Halbstetigkeit, Kurve und Bogenlänge entsprechende Verallgemeinerungen zu verwenden sind. Besonderes Augenmerk ist der Lebesgueschen Oberflächendefinition geschenkt und den ebenen Abbildungen, für welche die Begriffe „von beschränkter Variation“, ferner „Absolutstetigkeit“, und „die verallgemeinerte Funktionaldeterminante“ unter wesentlicher Mitwirkung der Topologie (des Index eines Punktes in bezug auf eine geschlossene Kurve), definiert werden. Bemerkenswerterweise haben diese Begriffe analoge Eigenschaften wie die entsprechenden im klassischen eindimensionalen Fall. Die vermöge dieser Analogien erzielten Ergebnisse lassen besonders für die Variationsrechnung auf weitreichende Erfolge hoffen. Wegen Literatur wird verwiesen auf L. Cesari (dies. Zbl. 37, 323), T. Radó (Length and area, New York 1948, dies. Zbl. 33, 170) und J. W. T. Youngs (dies. Zbl. 38, 202). *G. Aumann.*

Cecconi, Jaurès: Sul teorema di Stokes. Rivista Mat. Univ. Parma 3, 233—264 (1952).

Let S be any continuous parametric (path) surface, let $(T, Q): x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in Q$, be any representation of S on the closed unit square Q , $[S]$ the set of points covered by S in E_3 , $C = \theta S$ the continuous closed (path) curve which constitutes the boundary of S , $L(S)$ the Lebesgue area of S , $l(C)$ the Jordan length of C . By $F(x, y, z)$ let us denote any function continuous with its first partial derivatives F_x, F_y, F_z in an open set $D \supset [S]$. If $L(S) < +\infty, l(C) < +\infty$, the three integrals of the equations below (*) exist, the last one as a Weierstrass-Tonelli line-integral, the first two as Weierstrass surface-integrals defined by the reviewer for problems of calculus of variations (L. Cesari, this Zbl. 29, 261). In the present paper the author proves that under the same general hypotheses we have

$$(*) \quad \iint_S F_z(x, y, z) dz dx - \iint_S F_y(x, y, z) dx dy = \int_C F(x, y, z) dx.$$

This statement is remarkable for its generality because it shows that Stokes formula (*) holds under the sole hypotheses which assure the existence of the Weierstrass integrals involved.

L. Cesari.

Caccioppoli, Renato: Misura e integrazione sulle varietà parametriche. III. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 629—634 (1952).

Im Anschluß an frühere Noten (dies. Zbl. 48, 37) skizziert Verf. Beweise für die Sätze von Gauß-Green und Stokes im E_3 und bespricht weiter die Ausdehnung auf k -dimensionale Mannigfaltigkeiten im E_n .

Otto Haupt.

Whitney, Hassler: r -dimensional integration in n -space. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 245—256 (1952).

Der Verf. schildert seine gegenüber früheren Noten (vgl. dies. Zbl. 29, 420; 41, 521) in manchen Punkten erweiterte Theorie der Ketten und Coketten und ihren Zusammenhang mit der Integrationstheorie. Im linearen Raum der polyedralen r -Ketten des euklidischen Raums E^n werden drei Normen betrachtet, insbesondere die „Lipschitzsche“ Norm $|A|$. Durch Vervollständigen hinsichtlich $|A|$ entsteht der Banachsche Raum C^r der allgemeinen Lipschitzschen r -Ketten. Die Elemente des konjugierten Raums \bar{C}^r sind die Lipschitzschen Coketten. Mit einer bestimmten anderen Norm als Ausgangspunkt ergeben sich entsprechend die Tensor-Coketten. $X \cdot A = X(A)$ mit $X \in \bar{C}^r$ und $A \in C^r$ ist das Integral von X über A . Verschiedene Realisierungen von allgemeinen Ketten und von Coketten, insbesondere in den Fällen $r=0$ und $r=n$, werden besprochen und zeigen unter anderem Zusammenhänge mit der Theorie der Mengenfunktionen. Nach J. H. Wolfe läßt sich jede Lipschitzsche r -Kette X durch eine Klasse äquivalenter Lipschitzscher Differentialformen ω vom Grade r darstellen, so daß $X \cdot \sigma$ (σ ein r -Simplex) auf die übliche Integration $\int \omega$ hinausläuft, worauf sich, zusammen mit der

verallgemeinerten Stokesschen Formel $\delta X \cdot A = X \cdot \partial A$ (∂A Rand von A) als Definitionsgleichung, die Erklärung der Ableitung $\delta \omega$ einer nicht im üblichen Sinne differenzierbaren Lipschitzschen r -Form ω gründet. Den Schluß bilden Bemerkungen über das Verhalten der untersuchten Begriffe bei Lipschitzschen Abbildungen.

K. Krickeberg.

Gehér, István: Sur une transformation d'intégrale. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 507—515, russ. u. französ. Zusammenfassgn. 516, 517—518 (1952).

$f(x, y)$ sei reell und stetig im Quadrat E_0 ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$). Für $-\infty < z < +\infty$ bedeute $m(z)$ das lineare Carathéodorysche Maß der Menge

$E_{x,y} [f(x, y) = z]$; $m(z)$ gehört einer Baireschen Klasse ≤ 2 an. $\int_{-\infty}^{\infty} m(z) dz$ ist dann und nur dann endlich, wenn $f(x, y)$ von beschränkter Variation im Sinne von

Tonelli (i. S. v. T.) auf E_0 ist; in diesem Falle gilt $\int_{-\infty}^{\infty} m(z) dz \geq \iint_{E_0} \sqrt{f_x^2 + f_y^2} dx dy$;

das Zeichen $=$ gilt dann und nur dann, wenn $f(x, y)$ vollstetig i. S. v. T. ist. Ist $\varphi(z) \geq 0$ Borel-meßbar auf der Borelschen Menge H , so ist auch $\varphi(f(x, y))$ Borel-meßbar auf $E = f^{-1}(H)$, und es gilt $\int_H \varphi(z) m(z) dz \geq \iint_E \varphi(f(x, y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2} dx dy$;

das Zeichen $=$ gilt für alle Borel-meßbaren Funktionen $\varphi(z) \geq 0$ dann und nur dann, wenn $f(x, y)$ vollstetig i. S. v. T. ist. Das sind Übertragungen auf Funktionen von zwei Veränderlichen der Sätze von Banach [Fundamenta Math. 7, 225—236 (1925)].

A. Császár.

Lévy, P.: Intégrales de Stieltjes généralisées. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 17—26 (1952).

Verf. ergänzt seine Untersuchungen über das stochastische Integral (dies. Zbl. 25, 198), welches er schon früher zum Studium der ebenen Brownschen Bewegung verwendet hat (dies. Zbl. 24, 139). Man vgl. auch Verf., dies. Zbl. 26, 306. $f(t)$, $g(t)$ seien in $0 \leq t \leq 1$ stetige Funktionen. Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n [g(t_{\nu-1}) + g(t_{\nu})] [f(t_{\nu}) - f(t_{\nu-1})]$$

$$\left[t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1, \max_{1 \leq \nu \leq n} (t_{\nu} - t_{\nu-1}) \rightarrow 0 \right]$$

vorhanden ist, ergibt sich das klassische Stieltjes-Integral $I = \int_0^1 g(t) df(t)$. Dem Integral I läßt sich ein Sinn zuordnen als verallgemeinertes Integral: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ (für die Definition der μ_n siehe dies. Zbl. 25, 198) und die analogen Limiten für jedes Teilintervall aus $[0,1]$ existieren, dann soll $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ sein. Verf. zeigt, daß eine von der Wahrscheinlichkeitstheorie freie und äquivalente Definition des verallgemeinerten Integrales auf folgende Weise möglich ist: Sei

$$\Phi(\tau, a, b) = \int_b^{a-\tau} \frac{g(t) + g(t+\tau)}{2} \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau} dt \quad [0 \leq b < a-\tau, 0 < a \leq 1, 0 < \tau < a].$$

Falls $\lim_{\tau \rightarrow 0} \Phi(\tau, a, b)$ für jedes a und b vorhanden ist, sei $I = \lim_{\tau \rightarrow 0} \Phi(\tau, 1, 0)$.

Die Definition gestattet auch eine mehrdimensionale Verallgemeinerung. Am Schluß der Arbeit führt Verf. eine Reihe ungelöster Fragen an. Bemerkte Druckfehler: S. 18 (3) lies $(x_\nu - x_{\nu-1})$ statt $(x_\nu - x_\nu)$ und $y_\nu = g(t_\nu)$ statt $y = g_\nu(t_\nu)$.
L. Schmetterer.

Herrera, Felix E.: Eine Bemerkung über die Differentiation beliebiger reeller Ordnung. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 9, 79—85 (1952) [Spanisch].

Ausgehend von der Definition der Ableitung $D^\alpha f(x)$, wo α eine reelle Zahl ist, durch das Riemann-Liouvillesche Integral, wird vom Verf. für den Fall $0 < \alpha < 1$ eine Entwicklung hergeleitet, die eine Verallgemeinerung des Taylorschen Satzes darstellt und aus der man dann die Ableitung mit beliebiger Genauigkeit ermitteln kann. Weiter wird, wieder für $0 < \alpha < 1$, ein Satz bewiesen, der ein Analogon darstellt zu der Aussage, daß zwei Funktionen, die dieselbe Ableitung besitzen, sich nur um eine Konstante unterscheiden.
N. Stuloff.

Marczewski, Edward: Théorème ergodique; généralisations et applications. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 125—127, ungarische Übersetzung 128—130, russische Zusammenfassg. 130 (1952).

Die Mitteilung bespricht die in Breslau von der Gruppe der reellen Funktionen des polnischen Staatlichen Mathematischen Institutes erhaltenen Ergebnisse in bezug auf den individuellen Ergodensatz und seine Anwendung auf die Kettenbruchtheorie, z. B.: Ryll-Nardzewski hat eine vom Ref. vorgeschlagene Abschwächung der Dunford-Millerschen Bedingung als äquivalent der Behauptung des erwähnten Satzes erkannt. Er ist auch dank einer vom Verf. eingeführten ergodischen Transformation des Abschnitts $(0, 1)$ zu einer Verallgemeinerung der grundlegenden Resultate von Khintchine über Kettenbrüche gelangt. Dieses Ergebnis von Ryll-Nardzewski ist dann vom Ref. spezialisiert worden. Literaturhinweise auf die Arbeiten der genannten Autoren ermöglichen ein genaues Studium.

S. Hartman.

Ottaviani, Giuseppe: Sulla convergenza uniforme delle successioni di funzioni. Giorn. Ist. Ital. Attuari 15, 219—234 (1952).

Una funzione $f(x)$ definita in (a, b) è chiamata dall'A. di classe ${}_aV_a^b$ se l'insieme numerico $\sum_j |f(x_{j+1}) - f(x_j)|^\alpha$ corrispondente a tutte le possibili divisioni di (a, b) ed a tutti gli $\alpha > 1$ ha un estremo superiore finito. L'A., estendendo un suo precedente teorema (questo Zbl. 34, 425) dà una condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di funzioni limitate converga verso una funzione della classe ${}_aV_a^b$. Successivamente l'A. precisa ed estende un suo criterio di convergenza uniforme verso una funzione a variazione doppia finita.
G. Sansone.

Császár, Ákos: Sur la propriété de Darboux. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 551—555, français. Übersetzung 556—560 und russische Zusammenfassg. 555 (1952) [Ungarisch].

Der Darbouxseigenschaft (D_0) einer reellen Funktion $f| [a, b]$, nämlich für $a \leq \alpha < \beta \leq b$ in $[\alpha, \beta]$ jeden Wert zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ anzunehmen, wird eine allgemeinere gegenübergestellt: \mathfrak{R} sei ein System von Mengen von reellen Zahlen, das alle einpunktigen Mengen, ferner mit jeder Menge N jede Teilmenge von N , und schließlich mit den Mengen einer Folge allemal auch deren Vereinigung enthält. $f| [a, b]$ hat die Eigenschaft ($D_{\mathfrak{R}}$), wenn f für $a \leq \alpha < \beta \leq b$ in $[\alpha, \beta]$ jeden Wert zwischen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ annimmt mit Ausnahme einer Menge aus \mathfrak{R} . Für das Bestehen von (D_0) bzw. ($D_{\mathfrak{R}}$) werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, welche sich auf die links- und rechtsseitigen, oberen und unteren Limiten von f beziehen und den Charakter von Eigenschaften im kleinen haben.

G. Aumann.

Battig, N. Estela F. de und Ernesto Lammell: Bemerkung über hinreichende Bedingungen für Extrema unter Nebenbedingungen. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 9, 57—61 (1952) [Spanisch].

Damit die Funktion $f(x_1, \dots, x_5)$ im Punkt $A = (a_1, \dots, a_5)$ unter den Nebenbedingungen $\varphi(x_1, \dots, x_5) = 0$, $\psi(x_1, \dots, x_5) = 0$ mit $\partial(\varphi, \psi)/\partial(x_4, x_5)|_A \neq 0$ ein relatives Extremum besitzt, ist folgendes hinreichend: Bedeutet F die Funktion $f + \lambda \varphi + \mu \psi$ und $D_{x\sigma\sigma}$ den Differentialoperator

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} & \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} & \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\sigma}} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\varrho}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{\kappa}} & \frac{\partial \psi}{\partial x_{\sigma}} & \frac{\partial \psi}{\partial x_{\varrho}} \end{vmatrix}, \text{ so ist der Rang der Matrix } \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_5} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_5} \end{vmatrix}_A$$

gleich 2 und $(\xi D_{145} + \eta D_{245} + \zeta D_{345})^2 F|_A$ eine definite quadratische Form in ξ, η, ζ .

G. Aumann.

Mandelbrojt, S.: Quelques théorèmes d'unicité. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 349—355 (1952).

Exposé des recherches récentes de l'A. (cf. ce Zbl. 34, 368; 36, 332; 37, 325) qui rassemblent et étendent des résultats aussi divers que le théorème de S. Bernstein sur l'approximation polynomiale sur tout l'axe réel, les conditions suffisantes pour les problèmes des moments de Stieltjes et de Hamburger, le th. de Denjoy-Carleman sur les classes quasi-analytiques, l'approximation par des combinaisons $\sum a_n f_n(x + \xi_n)$ ou $\sum b_n f^{(n)}(x)$, et les propriétés des noyaux de Carleman.

G. Bourion.

Allgemeine Reihenlehre:

Romaña, M. Sage de: Über eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Konvergenzkriteriums für die Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 9, 37—44 (1952) [Spanisch].

Si les deux séries de termes complexes $\sum_1^{\infty} a_n$, $\sum_1^{\infty} \alpha_n$ vérifient les conditions:

$x_{n+1}/\alpha_n = 1 + \beta_n$, $\beta_n \rightarrow 0$, $a_{n+1}/a_n = (\alpha_{n+1}/\alpha_n) + \gamma_n$ pour $n > N$, et $\sum_1^{\infty} |\gamma_n|$ con-

vergente, les deux séries $\sum_1^{\infty} a_n$, $\sum_1^{\infty} \alpha_n$ convergent ou divergent simultanément. L'A.

démontre ce théorème en s'appuyant sur un théorème de Du Bois-Reymond, bien qu'il serait plus simple de l'établir comme conséquence d'une note de H. Jehle (ce Zbl. 32, 404, Hilfssatz 1). Il en fait application pour démontrer le critère de convergence de Weierstrass.

P. Puig Adam.

Hitotumatu, Sin: On the convergence of a multiple power series. Kōdai math. Sem. Reports Nr. 4, 111—114 (1952).

Die Arbeit liefert einen Beitrag zur elementaren Reihenlehre. Ist $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$ eine Doppelreihe von komplexen Zahlen, so werden zwei Konvergenzbegriffe besonders häufig benutzt: einmal nennt man $\sum a_{\mu\nu}$ konvergent (P -konvergent), wenn es eine komplexe Zahl s gibt, derart, daß die Folge $s_{mn} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu}$ der Partialsummen gegen s konvergiert, d. h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl k gibt, so daß gilt: $|s_{mn} - s| < \varepsilon$ für jedes Paar m, n mit $m \geq k, n \geq k$; zum anderen nennt man $\sum a_{\mu\nu}$ konvergent (A -konvergent), wenn es eine Anordnung der $a_{\mu\nu}$ zu einer einfachen Folge c_ρ gibt, derart, daß die Partialsummen der Reihe $\sum c_\rho$ konvergieren. Offenbar gibt es A -konvergente Doppelreihen, die nicht P -konvergent sind und umgekehrt. Ist $\sum a_{\mu\nu}$ absolut konvergent, so stimmen beide Konvergenzbegriffe überein. Ist $\sum \alpha_{mn} x^m y^n$ eine zweifache Potenzreihe, die in einem Punkt (x_0, y_0) A -konvergent ist, so konvergiert bekanntlich die Reihe absolut und gleichmäßig im Dizylinder $\{|x| < |x_0|, |y| < |y_0|\}$. Dieser Satz wird, wie sich durch einfache Beispiele zeigen läßt, falsch, wenn man statt der A -Konvergenz die P -Konvergenz von $\sum \alpha_{mn} x^m y^n$ in (x_0, y_0) voraussetzt. Verf. zeigt nun: Eine Potenzreihe $\sum \alpha_{mn} x^m y^n$, die in jedem Punkt (x, y) aus einer Umgebung eines Punktes (x_0, y_0) P -konvergent ist, konvergiert absolut und gleichmäßig in abgeschlossenen Dizylinder $\{|x| \leq |x_0|, |y| \leq |y_0|\}$. — Die Menge derjenigen Punkte, in denen eine Potenzreihe $\sum \alpha_{mn} x^m y^n$ P -konvergent und nicht A -konvergent ist, enthält also keine inneren Punkte. *R. Remmert.*

Pennington, W. B.: Some inequalities related to Abel's method of summation. Proc. Amer. math. Soc. 3, 557—565 (1952).

Zur Klasse der zahlreichen heute bekannten Sätze vom Abel-Tauberschen Typus wird das folgende Ergebnis neu hinzugefügt: Falls $\sum_0^\infty a_n x^n$, a_n reell, für $0 < x < 1$ konvergiert, $p \geq 1$ und $r > 0$ fest gewählte Zahlen und $t > 1$ einen variablen Parameter bezeichnen und $\log x = -r/t(\log t)^p$ gesetzt wird, so gilt

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sum_0^\infty a_n x^n - x^t \sum_{n \leq t} a_n \right\} \geq p \liminf_{x \rightarrow \infty} a_n n \log \log n.$$

Der Faktor p auf der rechten Seite kann nicht durch einen kleineren ersetzt werden; die Ungleichung ist in diesem Sinne die bestmögliche. Als einfaches Korollar ist ein Theorem von T. Vijayaraghavan enthalten, wonach aus $a_n n \log \log n > -K$ ($n \geq 3$) und $\sum_0^\infty a_n x^n \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow 1-0$) auf $\sum_0^m a_n \rightarrow -\infty$ ($m \rightarrow \infty$) geschlossen werden kann.

H. Hadwiger.

Szász, O.: On the product of two summability methods. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 75—84 (1952).

Sind T_1 und T_2 zwei reguläre Limitierungsverfahren, die zu einer T_1 - bzw. T_2 -Transformation üblicher Art gehören, so sei unter $T_1 T_2$ die T_1 -Transformation der T_2 -Transformation bzw. das dazu gehörige Limitierungsverfahren verstanden. Kann von der T_1 -Limitierbarkeit auf die $T_1 T_2$ -Limitierbarkeit geschlossen werden? Vgl. dazu Verf., dies. Zbl. 46, 290. Jetzt wird gezeigt, daß die Frage zu bejahen ist, wenn T_1 das Abelsche, T_2 das Hausdorffsche, ebenso wenn T_1 das Borelsche, T_2 das Hausdorffsche, ebenso wenn T_1 das Abelsche, T_2 das Taylorsche Verfahren (circle method) bedeutet. Die Frage kann auch zu verneinen sein: Beispiel: T_1 das Borelsche Verfahren, T_2 das auf der Transformation $t_n = (s_n + s_{n+1})/2$ beruhende Verfahren. — Weitere Literatur: R. P. Agnew, dies. Zbl. 18, 355.

W. Meyer-König.

Vermes, P.: Convolution of summability methods. J. Analyse math. 2, 160—177 (1952).

Ist $A = (a_{nk})$ eine Matrix ($n, k = 0, 1, \dots$), so definiert Verf. die kommutative und assoziative Faltung $C = A * B$ durch $c_{nk} = \sum_{i=0}^k a_{ni} b_{n, k-i}$. Vermöge A läßt sich eine Folge s_n in die Folge $\sigma_n = \sum_{k=0}^\infty a_{nk} s_k$ transformieren. Sind A und B in diesem Sinn konvergenzerhaltend bzw. regulär, so hat $A * B$ dieselbe Eigenschaft. Die konvergenzerhaltenden Matrizen bilden mit $*$ als multiplikativer Verknüpfung und der Norm $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}|$ eine komplexe Banach-

Algebra mit Einselement. Ist für jede beschränkte Folge der Kern der A -Transformation nicht größer als der Kern der Folge selbst, ebenso für B , so hat auch C diese Eigenschaft. Die Faltung von Euler-Knoppschen Matrizen liefert Limitierungsverfahren, die die geometrische Reihe im Innern einer allgemeinen Lemniskate summieren; dieses Innere kann aus endlich vielen getrennten einfach zusammenhängenden Gebieten bestehen. Ein allgemeiner Satz über die Summierung von Potenzreihen durch Matrizen A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = 1$ setzt Untersuchungen von Verf. (dies.

Zbl. 33, 257) und J. Teghem (dies. Zbl. 35, 338) fort. — Mit Rücksicht auf die Möglichkeit, mit Hilfe der Matrix F eine Reihe $\sum u_k$ in eine Folge $\sigma_n = \sum_k f_{nk} u_k$ zu transformieren, definiert

Verf. noch eine zweite Art der Faltung: $H = F * * G$ mit $h_{nk} = (k+1)^{-1} \sum_{i=0}^k f_{ni} g_{n, k-i}$.

Diese Faltung zweier in dem neuen Sinn konvergenzerhaltender (regulärer) Matrizen ist konvergenzerhaltend (regulär). Die Operation $**$ ist kommutativ und assoziativ und gibt bei geeigneter Normdefinition Anlaß zu einer komplexen Banach-Algebra der konvergenzerhaltenden Matrizen (ohne Einselement). F ist genau dann idempotent ($F * * F = F$), wenn $f_{nk} = \alpha_n^k$. Die Faltung $**$ gewisser Mittag-Lefflerscher Reihe-Folge-Transformationen (vgl. R. G. Cooke, Kapitel 8, dies. Zbl. 40, 25) führt zu einer sehr einfachen Formel. Entsprechen F und G dem Borel-Verfahren, so summiert H die geometrische Reihe auch auf dem Rand der Borelschen Halbebene (abgesehen von $z = 1$).
W. Meyer-König.

Sargent, W. L. C.: On the summability of infinite integrals. J. London math. Soc. 27, 401—413 (1952).

Es sei $a > 0$ und $\lambda \geq 0$. Notwendig und hinreichend dafür, daß mit $\int_a^\infty x(t) dt$ auch $\int_a^\infty k(t) x(t) dt$ (C, λ) -summierbar ausfällt, ist die Existenz eines b ($b \geq a$), so daß $k(t)$ in (a, b) meßbar und wesentlich beschränkt und für $t \geq b$ mit einer Funktion der Form $\theta(t) = h + \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)} \int_t^\infty (u-t)^\lambda dx(u)$ äquivalent ist, wo h eine Konstante bedeutet und $\int_b^\infty t^\lambda |dx(t)| < \infty$ ist. — Eine analoge Aussage läßt sich

bezüglich der (C, λ) -Summierbarkeit des Stieltjesschen Integrals $\int_a^\infty k(t) dx(t)$ im Falle $\lambda > 0$ machen. Die Darstellbarkeit von $\theta(t)$ als λ -faches fraktioniertes Integral hängt mit Bedingungen anderer Autoren zusammen, welche bei verwandten Kriterien die Existenz einer absolut stetigen λ -fachen fraktionierten Derivierten von $k(t)$ verlangen. Resultate dieser Art wurden u. a. von L. S. Bosanquet erzielt.
H. Hadwiger.

Obrechhoff, Nikola: Sur quelques égalités limites pour les dérivées des fonctions et les différences des suites. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 595—611, ungarische und russische Zusammenfassgn. 611—612, 612 (1952).

Eine für $x > a$ gegebene Funktion $\varphi(x)$ besitzt „reguläres Wachstum“, falls eine reelle Zahl m existiert, so daß zu jedem $\lambda > 0$ gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} = \lambda^m$. — Unter geschickter Anwendung einiger Grundformeln der Differenzenrechnung werden mehrere Sätze hergeleitet: (I) In den Intervallen $x_i < x < x'_i$ ($i = 1, 2, \dots$; $0 < x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \dots$ mit $x'_i \geq c x_i$, wobei die Konstante $c > 1$ ist) sei die reelle Funktion $f(x)$ n -fach stetig differenzierbar gegeben. Ferner existieren zu $f(x)$ zwei Konstanten A und M , so daß für $x_i < x < x'_i$ ($i = 1, 2, \dots$) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$ und $f^{(n)}(x) > -M x^{-n} \varphi(x)$ zutrifft; dabei ist $\varphi(x)$ eine positive Funktion regulären Wachstums, von der überdies angenommen wird, daß sie in keinem der Intervalle zugleich steigt und fällt. In den Intervallen $x_i(1+\varepsilon) \leq x \leq x'_i(1-\varepsilon)$ mit $0 < \varepsilon < (c-1)/2c$ gilt dann für $\nu = 1, 2, \dots, n-1$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\nu}{\varphi(x)} f^{(\nu)}(x) = A m(m-1) \cdots (m-\nu+1)$. (II) Die

Bedingung $f^{(n)}(x) > -M x^{-n} \varphi(x)$ läßt sich für $\nu = n$ durch die Forderung ersetzen, daß $f^{(n)}(x)$ in keinem der Intervalle zugleich steigt und fällt. (III) Weiter wird das dem Ergebnis (I) Entsprechende für Zahlenfolgen, d. h. Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$, die lediglich für $x = 1, 2, \dots$ definiert sind, hergeleitet. Die Variante (II) läßt sich auch hier übertragen. (IV) Satz (I) kann unter anderem auf Cesàro-summierbare uneigentliche Integrale angewandt werden, Satz (III) in analoger Weise auf Cesàro-summierbare Reihen. H. Töpfer.

Pisanelli, Domingos: Untersuchung einer Folge von Potenzen. Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 6, 61—68 (1952) [Portugiesisch].

Étude élémentaire des limites pour $n \rightarrow \infty$ de la suite, déjà classique, définie par itération de la fonction exponentielle $Q_n = a^{Q_{n-1}}$ avec $Q_1 = a$, selon les valeurs de a (> 0). (Les mêmes résultats furent présentés, parmi d'autres plus généraux, par P. M. Gonzalez Quijano en 1919 à la „Asociación Española por el Progreso de las Ciencias“ Congrès de Bilbao. „Operaciones de orden superior al tercero.“)

P. Puig Adam.

Gonçalves, J. Vicente: Sur les fractions continues réelles. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 237—335 (1952).

Verf. bringt zunächst mit einigen Änderungen die Perronsche Darstellung für die Konvergenz eines rein periodischen Kettenbruches und den Galoisschen Satz für regelmäßige rein-periodische Kettenbrüche, wobei er die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angibt, daß ein rein periodischer Kettenbruch und der zugehörige Kettenbruch mit inverser Periode beide konvergieren. Im Anschluß daran wird ein einfacher Beweis des Lagrangeschen Periodizitätssatzes erbracht. Es werden ferner die Lösungen der diophantischen Gleichung $ax^2 - by^2 = \pm c$ oder $x^2 - By^2 = \pm C$ untersucht, wo $B = b/a$ und $C = c/a$ ist. Verf. unterscheidet dabei Lösungen erster und Lösungen zweiter Art. Jede Lösung der obigen Gleichung, für die $h = |x|$ und $l = |y|$ einen Näherungsbruch h/l von \sqrt{B} bilden, heißt eine Lösung erster Art. Jede andere Lösung mit relativ primen Werten für $|x|$ und $|y|$ heißt eine Lösung zweiter Art. Es werden des weiteren die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß die Gleichungen $x^2 - By^2 = \pm C$ Lösungen zweiter Art besitzen. Die Lösungen 2. Art werden weiter in einzelne Klassen eingeteilt. Dabei werden zunächst die Lösungen der Klassen 1 und 2 untersucht und schließlich der allgemeine Fall. Im letzten Abschnitt wird ein bekannter Konvergenzsatz von Tietze verallgemeinert. Betrachtet wird der Kettenbruch

$$(A) \quad y_0 + \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n} + \dots$$

Dabei sollen x_n und y_n folgenden Bedingungen genügen (a) $y_n \geq 1$, $x_n + y_n \geq 1$ ($n = 0, 1, \dots$). Die Näherungsbrüche sollen mit A_n bezeichnet werden. Falls nun die Bedingungen (a) erfüllt sind, konvergiert der Kettenbruch A , sobald x_n von einer bestimmten Stelle ab negativ ist. Wenn es unbegrenzt viele positive x_n gibt, ist das Erfülltsein der notwendigen Konvergenzbedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = 0$ für die Konvergenz des Kettenbruches (A) auch hinreichend. J. Mall.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Fejér, Lipót: Approximation durch Interpolation. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 99—106, russische und deutsche Zusammenfassng. 106—108, 109—112 (1952) [Ungarisch].

L'A. expose brièvement un de ses théorèmes classiques [Feldheim, Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique, Paris 1939 (ce Zbl. 21, 397), p. 42] en lui donnant un cadre historique et en expliquant les notions qui interviennent dans son énoncé, mais sans démonstration. Une discussion plus complète a été donnée dans un travail récent de l'A. (ce Zbl. 42, 69).

J. Horváth.

Chandra Sekar, C. and P. N. Chakraborty: On the concept and use of orthogonal semi-polynomials. Sankhyā 12, 141—150 (1952).

Es sei $z_m(x)$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) eine Funktionenfolge, in der jede Funktion konstante Werte in den beiden Teilmengen (B) , (C) einer endlichen Menge (A) annimmt. Man betrachtet die Semipolynome $\Psi_m(x) = z_m(x) + a_{m1}x + a_{m2}x^2 + \dots$

$\dots + a_{mm} x^m$, die die Bedingungen

$$\sum_B \Psi_m(x) = 0 = \sum_C \Psi_m(x), \quad (m = 1, 2, \dots);$$

$$\sum_A \Psi_m(x) \Psi_p(x) = 0 \quad \text{wenn } m \neq p, > 0 \quad \text{wenn } m = p,$$

$$\sum_A \Psi_m^2(x) = 1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad \sum_B \Psi_0^2(x) = 1 = \sum_C \Psi_0^2(x)$$

erfüllen. Solche Systeme von Semipolynomen, auf die man einige Eigenschaften der orthonormalen Polynomsysteme verallgemeinern kann, haben einige Vorteile in gewissen parabolischen Interpolationsproblemen durch die Methode der kleinsten Quadrate. Die Bestimmung und Konstruktion dieses orthonormalen Systems von Semipolynomen durch die Teilmengen (B) und (C) gründet sich auf einige Sätze, die der wesentliche Beitrag dieser Arbeit sind.

J. M^a. Orts.

Alexits, György: Die Bedeutung der Lebesgueschen Funktionen für das Problem der Konvergenz von Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 233—246 und russische Zusammenfassg. 246—248 (1952) [Ungarisch].

Soit $w(x) \geq 0$ intégrable dans $a \leq x \leq b$. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ orthonormale par rapport à $w(x)$, c.-à.-d. $\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) w(x) dx = \delta_{ij}$. Posons $K_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x)$, $L_n(x) = \int_a^b |K_n(t, x)| dt$ (fonction de Lebesgue), $L_n(w, x) = \int_a^b w(x) |K_n(t, x)| dt$. Par une méthode connue [Zygmund, Trigonometrical series, Warszawa 1935 (ce Zbl. 11, 17), p. 253] l'A. déduit d'abord le lemme suivant: Si les a_n de $\sum a_n \varphi_n(x)$ satisfont à $\sum a_n^2 < \infty$ et si $L_n(x) \leq \lambda_n$ p. p., où λ_n est une suite non-décroissante, alors, sauf sur un ensemble de mesure arbitrairement petite, $\sum_{k=m}^n a_k \varphi_k(x) = o(\sqrt{\lambda_n})$ pour m assez grand et $n = m, m+1, \dots$. De là on obtient les théorèmes:

I. Si $w(x) > 0$ p. p., $L_n(x) \leq \lambda_n$ et (2) $\sum c_n^2 \lambda_n < \infty$, alors (1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ converge p. p.

II. Si $w(x) \geq 0$, la suite $1/\sqrt{\lambda_n} \rightarrow 0$ est convexe, (2) est vérifié et (1) est (C, 1)-sommable, alors (1) converge p. p. — Soit maintenant $p_n(x)$ la suite orthonormale de polynômes déterminée d'une manière univoque par $w(x)$. III. (3) $\sum c_n p_n(x)$ converge p. p. si: 1. (3) est (C, 1)-sommable p. p., 2. $|p_n(x)| \leq P(h)$ dans $a+h \leq x \leq b-h$, ($h > 0$),

$$3. \int_a^{a+h} |p_n(x)| dx = O(\log n), \quad \int_{b-h}^b |p_n(x)| dx = O(\log n),$$

4. $\sum c_n^2 \log n < \infty$. — Supposons que $w(x)$ et $p_n(x)$ soient définis dans $[-1, 1]$. Soit $f(x) \sim \sum c_n p_n(x)$ et $s_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k p_k(x)$ Posons $\varrho_n = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - s_n(x)|$. IV. Si $|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x)| \leq M |x' - x|^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) dans $[-1, 1]$, alors on a

$$\varrho_n \leq (8 A_r M P_h^2 W_h / n^{r+\alpha}) \log(2n+2) + A_r (1 + B_h) M / n^{r+\alpha},$$

où $|w(x)| \leq W_h$ et $|p_n(x)| \leq P_h$ ($n = 1, 2, \dots$) dans $[-1+h, 1-h]$, et A_r resp. B_h sont des constantes ne dépendant que de r resp. h , qu'on peut déterminer explicitement. Si $f^{(r)}(x)$ a la variation totale V dans $[-1, 1]$, alors

$$\varrho_n \leq (8 A_r P_h^2 V W_h / n^{r+1}) \log(2n+2) + A_r (1 + B_h) V / n^{r+1}.$$

Ce théorème est basé sur la relation $|f(x) - s_n(x)| \leq E_n(f) (1 + L_n(w, x))$, où $E_n(f)$ est la meilleure approximation de $f(x)$ par des polynômes de degré n .

J. Horváth.

Boas jr., R. P.: Oscillation of partial sums of Fourier series. J. Analyse math. 2, 110—125 (1952).

Let $f(x)$ be real integrable of period 2π and $\tilde{f}(x)$ its conjugate function. $s_n(x)$, $\sigma_n(x)$ denote respectively the partial sum and the (C, 1)-mean of the Fourier series of $f(x)$. Let $s_n(0) = s_n$, $\sigma_n(0) = \sigma_n$, $r_n = s_n - f(0)$, $\varrho_n = \sigma_n - f(0)$. Put $E(x) = f(x) + f(-x) - 2f(0)$. — 1. If $r_n \geq 0$ for all n , $E'(x)$ is absolutely continuous (AC), $x^{-1} E''(x)$ is integrable and $E''(0) = 0$, then $E(x) = 0$ almost everywhere (a. e.), so that $f(x) - f(0)$ is odd and $r_n = 0$ for all n . — 2. If $r_n \geq 0$ for all n and for $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), $\tilde{f}(x)$ is AC, $x^{-1} \tilde{f}'(x)$ integrable, then $f(x) - f(0)$ is odd. — 3. If $\varrho_n \geq 0$ for all n , $\tilde{f}'''(0) = 0$, $\tilde{f}^{(IV)}(0)$ exists and, for $|x| > \varepsilon$, $\tilde{f}'(x)$ is AC, $x^{-1} \tilde{f}^{(IV)}(x)$ integrable,

then $f(x) - f(0)$ is odd. — 4. If $E(x)$ is constant for $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) and either both r_n and $r_{n+1} \geq -e^{-\delta n}$, or both r_n and $r_{n+1} \leq e^{-\delta n}$ ($\delta > 0$) for a sequence of integers n of Pólya maximum density exceeding $(\pi - \varepsilon)/\pi$, then $E(x) = 0$. The same conclusion holds if $\tilde{f}(x)$ is constant for $|x| < \varepsilon$ and either r_n or q_n satisfies the above conditions. Corollary. If the same conditions hold for $x = a$, where a is incommensurable with π , then $f(x) = \text{Const}$. On the other hand we can have $r_n > 0$ for a sequence of integers n with density arbitrarily close to 1 and $f(x)$ constant in a neighbourhood of 0 but not $\equiv \text{Const}$. — 5. If $f(x)$ (or $\tilde{f}(x)$) is analytic for $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), and either both r_n and $r_{n+1} > -e^{-an}$ or both r_n and $r_{n+1} < e^{-an}$ ($a > 0$) for a sequence of integers of density exceeding $(\pi - \varepsilon)/\pi$, then $E(x)$ is analytic for all x . The same conclusion holds if $\tilde{f}(x)$ is analytic for $|x| < \varepsilon$, $\tilde{f}(0) = 0$ and r_n is replaced by q_n . — 6. If $f(x)$ (or $\tilde{f}(x)$) is analytic for $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$); $\theta(t)$ is increasing, differentiable, concave, $\theta(x) = o(x)$, $\log x = o(\theta(x))$; both r_n and $r_{n+1} \leq e^{-\omega(n)}$, $\theta(n) = o(\omega(n))$, for a sequence $n = n_k$ such that $|pk - n_k| < \theta(n_k)$, where $p < \pi/(\pi - \varepsilon)$, then the Fourier cosine coefficients (a_n) of $f(x)$ are $O(e^{-a\theta(n)})$ ($a > 0$). The same conclusion holds if $\tilde{f}(x)$ is analytic for $|x| < \varepsilon$, $\tilde{f}(0) = 0$ and r_n is replaced by q_n . — 7. If $E^{(q-1)}(x)$ is AC, $x^{-1}E^{(q)}(x)$ is integrable for $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) and for a sequence $n = n_k$ such that $|pk - n_k| \leq L$, where $p < \pi/(\pi - \varepsilon)$ we have either both r_n and $r_{n+1} \geq -cn^{-q}$ or both r_n and $r_{n+1} \leq cn^{-q}$, then $a_n = O(n^{-q})$. The same conclusion holds if $E(x)$ is replaced by $\tilde{f}(x)$ and then it also holds if r_n is replaced by q_n provided that $\tilde{f}(0) = 0$ and $x^{-2}\tilde{f}^{(q)}(x)$ is integrable. — The proofs use the function

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi E(t) \frac{\sin(z + 1/2)t}{\sin(t/2)} dt,$$

for which $r_n = F(n)$, and known theorems on entire functions. Some results have been announced previously (7 not quite correctly) (this Zbl. 43, 291). J. Horváth.

Meňšov, D.: Über die Unbestimmtheitsgrenzen der Partialsummen von trigonometrischen Reihen. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 323—337 (1952) [Russisch].

Die Untersuchungen sind methodisch in jenen Gedankenkreis einzuordnen, der eine zusammenfassende Darstellung in Verf., dies. Zbl. 39, 70 gefunden hat. Vgl. auch Verf., dies. Zbl. 46, 296 und die dort angegebene Literatur. Das Hauptergebnis lautet: $G(x)$ und $F(x)$ seien in $[-\pi, \pi]$ definiert und mögen dort fast überall die Ungleichung $G(x) \leq F(x)$ erfüllen. Es ist zugelassen, daß $G(x)$ und $F(x)$ in Mengen positiven Maßes die Werte $\pm\infty$ annehmen. Dann kann man eine trigonometrische Reihe (1) definieren, deren Koeffizienten gegen 0 streben und für welche folgendes erfüllt ist: $F(x)$ bzw. $G(x)$ sind der obere bzw. untere Limes dem Maße nach [Definition, siehe dies. Zbl. 39, 70] für die Folge der Partialsummen $S_{n_k}(x)$ von (1) in $[-\pi, \pi]$. Für jede monoton wachsende Teilfolge natürlicher Zahlen n_k gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(x) \leq G(x) <$

$F(x) \leq \overline{\lim} S_{n_k}(x)$ fast überall in $[-\pi, \pi]$.

L. Schmetterer.

Deverall, L. I.: On the summation of trigonometric series. Studies appl. Math. 9, 15 p. (1952).

Zur geschlossenen Auswertung von Sin- und Cos-Reihen der Gestalt $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) \sin nx$, $q(x) = \alpha(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) \cos nx$ ($0 < x < \pi$) in Form expliziter Funktionen werden drei Verfahren besprochen. Die erste Methode, die allerdings bei den Funktionen $\alpha(n)$ nur einfache Pole zuläßt und auf der Anwendung des Cauchyschen Residuensatzes beruht, geht bereits auf Cauchy zurück und findet sich in Lindelöfs calcul des résidus dargestellt. Das zweite Verfahren beruht auf der Auflösung eines eindimensionalen Randwertproblems nach zweierlei Methoden. Das dritte Verfahren macht von der endlichen Sinus- bzw. Cos-Fourier-Transformation einer Funktion und ihren Eigenschaften Gebrauch. Die erwähnten Methoden werden an Beispielen illustriert. V. Garten.

Pati, T.: On the absolute summability of the conjugate series of a Fourier series. Proc. Amer. math. Soc. 3, 852—857 (1952).

L. S. Bosanquet and J. M. Hyslop gave a sufficient condition for the absolute Cesaro summability, at a point, of the allied series of a Fourier series (this Zbl. 16, 210,

Theorem K], and showed that their result was „best possible“ in a certain case. Here the author shows that it is „best possible“ in another case as well. He further states that for Fourier series and conjugate series, absolute Abel summability even when coupled with convergence does not necessarily imply absolute Cesaro summability of order one.

K. Chandrasekharan.

Hsiang, Fu Cheng: On the integro-jump of a function and its Fourier coefficients. *Bull. Calcutta math. Soc.* **44**, 55–58 (1952).

Let $f(t)$ be Lebesgue integrable in $(-\pi, \pi)$. Let $\psi(x, t) = f(x+t) - f(x-t) - D(x)$. Let $\bar{\sigma}_n(x)$ denote the arithmetic mean of the partial sums of the conjugate

Fourier series of f . Then it is proved that the existence of the integral $\int_0^t \frac{\psi(x, u)}{u^{1+\eta}} du$,

$\eta > 0$, implies that $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\sigma}_{2n}(x) - \bar{\sigma}_n(x)) = \pi^{-1}(\log 2) D(x)$. The same conclusion

follows from the hypothesis: $\int_0^t \psi(x, u) du = o\left(\frac{t}{\log 1/t}\right)$ as $t \rightarrow +0$.

K. Chandrasekharan.

Young, Frederick H.: Transformations of Fourier coefficients. *Proc. Amer. math. Soc.* **3**, 783–791 (1952).

Seien (a_n, b_n) die Fourierkoeffizienten einer der Klasse K angehörenden Funktion. Die Frage, unter welchen Bedingungen über die Faktorenfolge λ_n dann auch $(\lambda_n a_n, \lambda_n b_n)$ die Fourierkoeffizienten einer derselben Klasse K angehörenden Funktion sind, die Frage also nach der Charakteristik der Faktoren der Klasseninvarianz, wurde insbesondere von Fekete untersucht. Die Komposition der Faktorenfolge mit den Gliedern der trigonometrischen Reihe läßt sich durch den Spaltenvektor $\{\lambda_n a_n\}$, d. h. durch das Produkt der Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente λ_n sind, mit der einspaltigen Matrix $\{a_n\}$ beschreiben. Die Verallgemeinerung des Verf. besteht nun darin, die Diagonalmatrix durch eine allgemeine Matrix $T = (a_{kj})$ mit konstanten Elementen, bei der die außerhalb der Diagonale stehenden Elemente nicht notwendig verschwinden, zu ersetzen. Dafür, daß die Fourierkoeffizienten einer zur Klasse L_p ($1 < p < \infty$) gehörenden Funktion bei der Transformation

$$T(f) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} a_j \right) \cos kx + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} b_j \right) \sin kx \right]$$

in die Fourierkoeffizienten einer wieder zu L_p gehörenden Funktion übergehen, sind die folgenden beiden Bedingungen notwendig und hinreichend: 1. Aus $(a_j, b_j) \sim f \in L_p$ folgt $T(f) \in L_p$ auf jeder in L_p dichten Teilmenge L_p^0 , 2. die Transformationen

$$T_n(f) = \sigma_n^T(f; x) = \sum_{k=0}^n \frac{n+1-k}{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} (a_j \cos kx + b_j \sin kx)$$

bilden eine gleichmäßig beschränkte Folge von Transformationen von L_p in sich. *V. Garten.*

Džvaršejšvili, A. G.: Über die Approximation einer Funktion von zwei Veränderlichen durch ein trigonometrisches Polynom. *Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR* **13**, 449–455 (1952) [Russisch].

Let $F(x, y)$ be a continuous function of period 2π in each variable. By $E_{mn}[F]$ we denote the best approximation of F by trigonometric polynomials $T_{mn}(x, y)$ of order m in x and n in y . Let $\omega(F, \delta, \eta) = \sup |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_2, y_2)|$, $|x_1 - x_2| \leq \delta$, $|y_1 - y_2| \leq \eta$, be the modulus of continuity of F in x, y , and let $\omega_{x_0}(F, \eta)$ be the modulus of continuity of F in y alone, for $x = x_0$ fixed; $\omega_{y_0}(F, \delta)$ is defined similarly. Finally, let $\Delta^2(F, x, y, h, k)$ be equal to

$$F(x+h, y+k) + F(x-h, y+k) + F(x+h, y-k) + F(x-h, y-k) \\ + 4F(x, y) - 2F(x+h, y) - 2F(x-h, y) - 2F(x, y+k) - 2F(x, y-k).$$

Then: 1. We have $E_{mn}[F] \leq C[\omega(F, m^{-1}, n^{-1}) + \omega_{x_0}(F, n^{-1}) + \omega_{y_0}(F, m^{-1})]$ provided there exists a constant $M > 0$ and a point (x_0, y_0) such that $\omega_x(F, \eta) \leq M \omega_{x_0}(F, \eta)$, $\omega_y(F, \delta) \leq M \omega_{y_0}(F, \delta)$ for every (x, y) . 2. If $E_{mn}[F] \leq A/mn$ ($m, n = 1, 2, \dots$), then, with a suitable $M > 0$, we have $|\Delta^2(F, x, y, h, k)| \leq M(h+k)$. 3. If, in addition, $\lambda^{-1} \leq h/k \leq \lambda$, then $|\Delta(F, x, y, h, k)| \leq M h k$, with $M = \mu_\lambda$. 4. If

$$|\Delta^2(F, x, y, h, k)| \leq M h k, \quad |F(x+h, y) + F(x-h, y) - 2F(x, y)| \leq M h,$$

and if the latter condition holds with x and y interchanged, then $E_{mn}[F] \leq A(m^{-1} + n^{-1})$.

A. Zygmund (R.)

Džvaršejšvili, A. G.: Über die Summierung von trigonometrischen Doppelreihen nach der Riemannschen Methode. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 13, 513—518 (1952) [Russisch].

Let $\Delta^2(F, x, y, h, k)$ be defined as in the preceding review. With every double trigonometric series (S) we associate a function $F(x, y)$ obtained as the sum of the series integrated termwise twice with respect to x and twice with respect to y . The series (S) is said to be summable R_λ at the point (x, y) to sum s if the series defining F converges in the neighborhood of (x, y) and if $\lim_{u, v \rightarrow 0} \Delta^2(F, x, y, 2u, 2v)/16u^2v^2 = s$ provided u and v tend to $+0$ in such a fashion that $\lambda^{-1} \leq u/v \leq \lambda$. The main result of the paper is that if (S) is the Fourier series of an $f \in L$ and if it converges in the Pringsheim sense almost everywhere, then it is summable R_λ almost everywhere, to the same sum. *A. Zygmund (R.)*

Žak, I. E.: Zu einem Satz von L. Cesari über konjugierte Funktionen von zwei Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 877—880 (1952) [Russisch].

Let $f(x, y)$ be any real function, periodic of period 2π with respect to x and y , L -integrable in the square $Q = [0, 0; 2\pi, 2\pi]$, and let $\Sigma A_{mn}(x, y)$ be the double Fourier series of $f(x, y)$. Let $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ be the three conjugate functions of f defined, as in the one-dimensional case, by

$$f_1 = (2\pi)^{-1} \int \varphi_1(s; x, y) \operatorname{ctg}(s/2) ds, \quad f_2 = (2\pi)^{-1} \int \varphi_2(t; x, y) \operatorname{ctg}(t/2) dt, \\ f_3 = (2\pi)^{-2} \iint \varphi_3(s, t; x, y) \operatorname{ctg}(s/2) \operatorname{ctg}(t/2) ds dt,$$

where each integral ranges from 0 to π , and

$$\varphi_1 = f(x+s, y) - f(x-s, y), \quad \varphi_2 = f(x, y+t) - f(x, y-t), \\ \varphi_3 = f(x+s, y+t) - f(x-s, y+t) - f(x+s, y-t) + f(x-s, y-t).$$

I. If f is Lip α in Q or in any closed square interior to Q , then f_1, f_2, f_3 satisfy the following relations (1) $|f_1(x+h, y+k) - f_1(x, y)| = O(h^\alpha) + O(k^\alpha \lg k)$; (2) $|f_2(x+h, y+k) - f_2(x, y)| = O(h^\alpha \lg h) + O(k^\alpha)$; (3) $|f_3(x+h, y+k) - f_3(x, y)| = O(h^\alpha \lg h) + O(k^\alpha \lg k)$. As a corollary we have II: If f is Lip α in Q , or Q' , then f_1, f_2, f_3 are Lip α' for all $0 < \alpha' < \alpha$ in Q , or respectively. An example is given showing that the functions f_1, f_2, f_3 may be not Lip α . Both statements above extend to double Fourier series a theorem due to Privaloff on simple Fourier series. Statement II has been already proved by the rev. (this Zbl. 19, 207). [The author sets right also an incorrect statement of the rev. concerning functions f_1, f_2 . The correction does not affect the validity of the proof, given for f_3 only, but which holds also for f_1, f_2 .] For applications of theorem II see L. Cesari (this Zbl. 19, 262), V. Bononcini [this Zbl. 48, 79 and Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 6, 1—20 (1951, 2)]. *L. Cesari.*

Spezielle Funktionen:

Gussov, V. V.: Die Arbeiten russischer Gelehrter zur Theorie der Gammafunktion. Istoriko-mat. Issledovaniya 5, 421—472 (1952) [Russisch].

In §§ 1, 2 handelt es sich um die Arbeiten der Mathematiker D. Bernoulli, Euler, Lobatschefski, Sonin, Stekloff zur Theorie der Γ -Funktionen. Sie trat erstmals als Lösung eines Interpolationsproblems in Briefen von D. Bernoulli und L. Euler an Goldbach auf. Die historische Entwicklung wird sorgfältig und kritisch dargestellt. § 3 berichtet über einige Analoga zum Satz von Hölder [daß $\Gamma(z)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügt] sowie verschiedene mit Γ - und β -Funktion verwandte Funktionen. § 4 ist hauptsächlich den Funktionen von Alexejefski bzw. Kinkelin gewidmet, das sind Funktionen, die den Funktionalgleichungen $G_n(x+1) = G_n(x)G_{n-1}(x)$, $G_0(x) = \Gamma(x)$, bzw. $K_n(x+1) = x^{x^n} K_n(x)$ genügen. *K. Prachar.*

Storchi, Edoardo: Risoluzione generale in interi dell'equazione: $\operatorname{arctg} m/n = \operatorname{arctg} 1/x + \operatorname{arctg} 1/y$. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 191—206 (1952).

Für die im Titel genannten Gleichungen und für die Gleichung $\pi/2 = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z$ werden die sämtlichen ganzzahligen Lösungen ermittelt.

Robert Schmidt.

Bagchi, Hari Das and Bhoda Nath Mukherji: Note on a sequence of functions, defined by a difference-equation. *Simon Stevin* 29, 185—189 (1952).

The generating function of an enumerable sequence of functions, analytic in character and satisfying a difference-equation is dealt with. A power series is considered, representing the above generating function inside a radius of convergence R . This is calculated. It is then shown that the solutions of the difference-equation include a number of classical functions, such as the Gegenbauer functions, the Laguerre functions, the Hermite functions and the Tchebycheff functions.

M. J. O. Strutt.

Villari, Gaetano: Formule asintotiche per gli zeri dei polinomi d'Hermite. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 15, 93—103 (1952).

Seien $x_{n,\nu}$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm [n/2]$) die Nullstellen des n -ten Hermite-schen Polynomes $H_n(x)$. Dann gilt

$$x_{2n,\nu} = (\nu - \tfrac{1}{2}) \pi / \sqrt{4n+1} + C(\nu)/(4n+1)^2, \quad 0 < C(\nu) < \tfrac{4}{5}(\nu - \tfrac{1}{2})^2 \pi^2,$$

für $(\nu - \tfrac{1}{2}) \pi < \sqrt{4n+1}$, und ein ähnliches Ergebnis gilt für die $x_{2n+1,\nu}$. Beim Beweis wird die asymptotische Entwicklung der H_n verwendet. *K. Prachar.*

Mohr, Ernst: Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat.* 6, 245—253 (1952).

Zwischen dem zum Außengebiet der geschlossenen Kurve C der x -Ebene gehörenden Faberschen Polynom n -ter Ordnung $p_n(x)$ und den durch die Kreisbilder C_r desselben Gebietes bestimmten Tschebyscheffschen Polynomen $t_n(r; x)$ besteht die Beziehung: $\lim_{r \rightarrow \infty} t_n(r; x) = p_n(x)$ (P. Heuser, dies. Zbl. 41, 196). Hierfür gibt

Verf. einen neuen Beweis, einfacher, weil er ohne einen dort bewiesenen Hilfssatz über Polynomargumente auskommt. Weil der Beweis indirekt ist, geht allerdings eine Abschätzung von $|t_n(r; x) - p_n(x)|$ verloren. *P. Heuser.*

Koschmieder, Lothar: Die Randwerte der Ableitungen der Gegenbauerschen Polynome. *Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A* 9, 45—46 (1952) [Spanisch].

Verf. ermittelt nach dem von N. du Plessis [Proc. Amer. math. Soc. 2, 950 (1951)] auf die Legendreschen Polynome angewandten Verfahren die Werte aller Ableitungen der Gegenbauerschen Polynome in den Enden ihres Grundgebietes $(-1, 1)$. Die Mitteilung war schon gedruckt, als Verf. aus Math. Reviews 14, 641 (1953) erfuhr, daß sein Ergebnis schon in einer Arbeit von B. S. Popow vorkommt (dies. Zbl. 45, 181). (Autoreferat.)

Chakrabarty, N. K.: On a generalization of Bateman's K -function. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 63—70 (1952).

Für die von Mitra und Srivastava verallgemeinerte Batemansche K -Funktion, die in der vorliegenden Arbeit durch

$$K_n^l(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2^l \cos^l \theta \cos(x \operatorname{tg} \theta - n \theta) d\theta, \quad l > -1,$$

definiert wird, werden neue Eigenschaften angegeben und schon bekannte auf neue Weise hergeleitet. $K_{2m-l}^l(x)$ hat die erzeugende Funktion $(1+t)^l \exp\left(x \frac{t-1}{t+1}\right)$.

Hieraus folgt $K_{2m-l}^l(y+z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n-l}^l(y) K_{2(m-n)}^l(z)$. Für $K_n^l(x)$ existieren verschiedene Darstellungen, in denen die Gammafunktion, verallgemeinerte Laguerresche Polynome und Whittakersche $W_{k,m}$ -Funktionen auftreten. Ferner bestehen Beziehungen zwischen $K_n^l(x)$ und den Besselschen Funktionen $J_\nu(x)$. *E. Kreyszig.*

Koschmieder, Lothar: Integrale mit hypergeometrischen Integranden. II. *Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A* 9, 63—78 (1952) [Spanisch].

(Teil I, dies. Zbl. 32, 65.) Es werden die in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 32, 65;

40, 34) gefundenen Ergebnisse über hypergeometrische Integrale in Zusammenhang gebracht mit Ergebnissen, die E. Feldheim in einer dem Verf. erst jetzt zugänglich gewordenen Arbeit [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. Ser. 12, 17—49 (1943)] erhalten hat, und Erweiterungen auf Integranden mit n Veränderlichen gegeben. O. Volk.

Bose, B. N.: On certain integrals involving hypergeometric functions. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 169—174 (1952).

Author investigates certain integrals which instead of Bessel and Struve's functions involve hypergeometric functions. The method adopted is the well-known method of changing the order of integration and the method of Barnes [Proc. London math. Soc., II. Ser. 6, 141—177 (1908)] of evaluating contour integrals. The principle of operational calculus has also been used in author's method.

R. Gran Olsson.

● **Tricomi, Francesco G.:** Lezioni sulle funzioni ipergeometriche confluenti. Torino: Silvio Gheroni 1952. 282 p. con 29 fig. 2000 Lire.

Verf., der, im Schrifttum über die konfluenten hypergeometrischen Funktionen, das in den letzten zwanzig Jahren einen großen Umfang angenommen hat, in der vordersten Linie stehend, wichtige Beiträge insbesondere zur Asymptotik und zur Abzählung der Nullstellen geleistet hat, gibt eine ausführliche Darstellung der Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktionen unter Zugrundelegung der Kummer'schen Differentialgleichung und ihrer durch Potenzreihen und Laplacesche Integrale dargestellten Integrale im Anschluß an seine Arbeit dies. Zbl. 34, 337, und unter besonderer Berücksichtigung seiner weiteren Arbeiten. Im ersten einleitenden Kapitel werden die Laplacesche Transformation und ihre Haupteigenschaften, die Integrationstheorie der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung nach Frobenius und die Eulersche Gammafunktion behandelt. Das zweite Kapitel bringt die Reduktion der Differentialgleichungen

$(a_0 + b_0 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_2 + b_2 x) y = 0$, $y'' + (\alpha + \beta x^{-1}) y' + (A + Bx^{-1} + Cx^{-2}) y = 0$ auf die kanonische Form $x y'' + (c - x) y' - a y = 0$ mit den verschiedenen Sonderfällen und ihren Lösungen durch $\Phi(a, c; x)$; ferner werden die speziellen Fälle der Besselschen Funktionen und der Hermite'schen und Laguerreschen Polynome ausführlich dargestellt. Im dritten Kapitel wird die zweite Lösung $\Psi(a, c; x)$ in ihrem Zusammenhang mit $\Phi(a, c; x)$ untersucht; es folgt eine Asymptotik dieser Funktionen und Abzählung ihrer Nullstellen und schließlich wird ihr Verlauf im Reellen bestimmt. Das vierte Kapitel ist der unvollständigen Gammafunktion, der Fehlerfunktion, dem Integralsinus und -cosinus, den Fresnelschen Integralen und den Funktionen des parabolischen Zylinders gewidmet. Das letzte Kapitel bringt Anwendungen auf das Zweikörperproblem der Wellenmechanik, auf das Biegungsproblem der elastischen linsenförmigen Platte u. a.

O. Volk.

Funktionentheorie:

Walsh, J. L.: Polynomial expansions of functions defined by Cauchy's integral. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 221—244 (1952).

It is well-known that a function $f(e^{i\theta})$ of class $L^2(0, 2\pi)$ can be written in the form $f = f_1 - f_2$, where f_1 and f_2 are boundary functions of functions regular inside, resp. outside, the unit circle. The corresponding results for regions bounded by analytic Jordan curves are discussed. In the separation $f = f_1 - f_2$ the author uses Faber polynomials and Szegő polynomials, orthogonal with respect to a positive norm function, which satisfies a Lipschitz' condition. The paper also contains some related results concerning degree of approximation.

L. Carleson.

Walsh, J. L. and H. Margaret Elliott: Degree of approximation on a Jordan curve. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 1058—1066 (1952).

Let $f(z)$ be defined on an analytic Jordan curve, which encloses the origin, and assume that $f^{(k)}(z)$ has a modulus of continuity $\omega(\delta)$. It is proved that $f(z)$ can be approximated by a polynomial of degree n in z and z^{-1} with an error

$$< \text{Const. } n^{-k} \omega_0(n^{-1}), \text{ where } \omega_0(h) = \int_0^h t^{-1} \omega(t) dt + h \int_h^1 t^{-2} \omega(t) dt.$$

In proving this, the authors use an extension of Privaloff's theorem on conjugate functions. — Some converses are also given. L. Carleson.

Walsh, J. L. and Philip Davis: Interpolation and orthonormal systems. *J. Analyse math.* **2**, 1—28 (1952).

Sei $L^2(B)$ die Klasse der in einem Gebiet B eindeutigen regulär analytischen Funktionen $f(z)$, für welche $\|f\|^2 = \iint_B |f|^2 dx dy < \infty$ ist. Wenn B in geeigneter Weise eingeschränkt ist,

so gibt es unendlich viele Mengen von Funktionen $\{\varphi_n^*(z)\}$, wo in jeder Menge $\varphi_n^* \in L^2(B)$, $(\varphi_i^*, \varphi_j^*) = \delta_{ij}$ (S. Bergman, dies. Zbl. **40**, 190). Jedes $f \in L^2(B)$ besitzt dann die Entwicklung

(1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n^*(z)$, (2) $a_n = (f, \varphi_n^*)$, welche in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von B

gleichmäßig und absolut konvergiert. Verf. untersuchen, wie man in gewissen Fällen geschlossene orthonormale Systeme $\{\varphi_n^*(z)\}$ konstruieren kann, derart daß die Reihe (1) für jede Funktion f einer Klasse S gebildet werden kann, wo S eine weitere Klasse als $L^2(B)$ ist. Die Reihe stellt f in einem Teilbereich von B dar, der von f abhängt. Die Koeffizienten a_n brauchen nicht durch (2) definiert zu werden, sondern sie können durch ein Interpolationsverfahren (3) $a_n = L_n^*(f)$ definiert werden, das im Falle $f \in L^2(B)$ mit (2) übereinstimmt. — Die erwähnten Mengen werden nach folgender Methode konstruiert: Es wird verlangt, daß die Funktionen $\varphi_n^*(z)$ in bezug auf eine Menge von beschränkten linearen Funktionalen $\{L_n^*\}$ biorthogonal sind: $L_n^*(\varphi_m^*) = \delta_{nm}$. Die Funktionale L_n^* sind gewisse lineare Kombinationen von gegebenen linearen Funk-

tionalen L_n , $L_n^* = \sum_{k=0}^n a_{nk} L_k$, indem die Funktionen $\varphi_n^*(z)$ Lösungen von gewissen Extremal-

problemen sind. Falls $\{L_n\}$ nicht zu viel von der Menge $L_n(f) = f^{(n)}(0)$ abweicht, so ist die zugeordnete Menge $\{\varphi_n^*(z)\}$ von der Art, daß eine umfangreichere Klasse S nach der Reihe (1) entwickelbar ist. Wenn $L_n(f) = f(z_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, $z_n \in B$, wo f in einem Gebiet, das den Null-

punkt enthält, regulär ist, so konvergiert die durch (1) und (3) gegebene Reihe gegen $f(z)$ in einem Teilgebiet von B , das von einer Niveaulinie der Greenschen Funktion von B mit dem Pole $z = 0$ begrenzt wird. — Die Untersuchungen werden noch dazu angewandt, um in B reguläre Funktionen der Klasse $L^2(B)$ am besten zu approximieren. V. Paatero.

Mikolás, Miklós: Sur une extension de la formule d'Euler-Mac-Laurin, se rapportant à des intégrales curvilignes complexes. *C. r. I. Congr. Math. Hongr.* 1950, 519—538, russische und französ. Zusammenfassgn. 539—540, 541—550 (1952) [Ungarisch].

Durch iterierte partielle Integration gewinnt Verf. die folgende Übertragung der Euler-MacLaurinschen Summenformel auf Kurvenintegrale analytischer Funktionen:

$$\sum_{\nu=1}^n f(z_\nu) (z_\nu - z_{\nu-1}) = \int_L f(z) dz + U_1(z_0) (f(z_n) - f(z_0)) + U_2(z_0) (f'(z_n) - f'(z_0)) + \dots \\ + U_r(z_0) (f^{(r-1)}(z_n) - f^{(r-1)}(z_0)) - \int_L U_r(z) f^{(r)}(z) dz.$$

Hier ist L ein im Regularitätsgebiet von $f(z)$ verlaufender z_0 mit z_n verbindender rektifizierbarer Kurvenbogen, der durch die Punkte z_1, \dots, z_{n-1} unterteilt ist; die $U_k(z)$ sind durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet: 1. $U_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) ist regulär auf L , ausgenommen die Punkte z_ν , und es ist $U'_{k+1}(z) = -U_k(z)$. 2. $U_k(z)$ ($k = 2, 3, \dots$) ist stetig in den z_ν . 3. $U_1(z)$ ist auf jedem Teilbogen von L zwischen zwei z_ν linear und erleidet an jedem z_ν einen Sprung um $z_\nu - z_{\nu-1}$.

(L)^{zn}
4. $\int_{z_0} U_k(z) dz = 0$, $k = 1, 2, \dots$ — Diese $U_k(z)$ werden explizit mit Hilfe der Bernoullischen Polynome ausgedrückt, und es werden Abschätzungen gegeben. (Referat nach dem französischen Auszug.) H. Grunsky.

Stejnberg, N. S.: Über die Interpolation der ganzen Funktionen. *Mat. Sbornik*, n. Ser. **30 (72)**, 559—574 (1952) [Russisch].

La convergence vers la fonction entière $f(z)$ de la série d'interpolation de Newton formée avec les noeuds a_n est assurée par la condition suffisante de Ibragimov et Keldyš (ce Zbl. **41**, 200): $\log M(r) < Cn(\theta r)$ où les constantes positives θ et C doivent vérifier $\theta < 1/2$, $C \log(\theta/(1-\theta))$; $M(r)$ et $n(r)$ désignent resp. le max. de $|f|$ et le nombre des noeuds dans $|z| \leq r$; d'autre part pour $\theta > 1/2$ aucun choix de C n'assure la validité du critère. 1. L'A. essaie de remplacer θ par une fonction de r croissant vers $1/2$, et C par une fonction de r . $\log M(r) < (Ar^-) n[(1/2 - \lambda(r))r]$ donne une condition suffisante quel que soit A , si $r\lambda(r) \rightarrow \infty$ et $[1/2 - \lambda(r)]r$ croissant. Si $r\lambda(r)$ décroît vers zéro, on n'obtient de condition suffisante pour aucun choix de A . 2. L'A.

indique une classe de suites $\{a_n\}$ pour lesquelles on peut donner une condition suffisante du type $\log M(r) < \chi(r) n(r/2)$. 3. Quand les a_n sont réels et positifs, l'A. donne une extension où θ et C sont remplacés par des fonctions de l'argument φ de z . *G. Bourion.*

Evgrafov, M. A.: Das Verhalten einer Potenzreihe für Funktionen der Klasse H_δ auf dem Rande des Konvergenzkreises. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 481—492 (1952) [Russisch].

(1) $\sum_0^\infty a_n z^n = f(z)$ sei regulär in $|z| < 1$ und dort zur Klasse H_δ gehörig, d. h. $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta d\theta$ sei beschränkt für $r \rightarrow 1$ ($0 < \delta < 1$). Satz 1: Ist $\delta = 1/p$ (p eine natürliche Zahl), so ist für jedes $\varepsilon > 0$ die Reihe (1) auf $|z| = 1$ fast überall C -summierbar (d. h. Cesàro-summierbar) von der Ordnung $p - 1 + \varepsilon$. Satz 2: Ist $\delta \geq 1/p$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $F(\theta) \geq 0$, so daß die C -Mittel $(p - 1 + \varepsilon)$ -ter Ordnung von (1) für $z = e^{i\theta}$ dem Betrage nach $\leq F(\theta)$ sind und $\int_0^{2\pi} [F(\theta)]^\delta d\theta < \infty$ ist. Unter anderem beweist Verf. weiter eine

G. A. Fridman zugeschriebene Koeffizientenbeziehung: $a_n = o(n^{-1+1/\delta})$. Diese Aussage läßt sich nicht verbessern. — Sodann werden zu H_δ gehörige Funktionen (1) der Form (2) $\sum_{k=0}^\infty z^{n_k} P_{m_k}(z)$ betrachtet, wo die $P_{m_k}(z)$ Polynome vom Grad m_k sind und $n_{k+1} > (1 + \lambda)(n_k + m_k)$ ist für ein $\lambda > 0$. Es gilt: $|a_{n_k+q}| \leq \varepsilon_k q^{-1+1/\delta}$ für $q \leq m_k/2$, $|a_{n_k+q}| \leq \varepsilon_k (m_k - q)^{-1+1/\delta}$ für $q > m_k/2$ ($\varepsilon_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$). Aus einer Ungleichung, die die Teilsummen (genauer eine Teilfolge derselben) und die C -Mittel von Lückenreihen miteinander verknüpft, ergeben sich zusammen mit den anfangs abgeleiteten Sätzen Aussagen folgender Art: $S_{n_k+m_k}(e^{i\theta}, f)$, die $(n_k + m_k)$ -te Teilsumme von (2) in der Form (1) für $z = e^{i\theta}$, konvergiert für fast alle θ bei $k \rightarrow \infty$. Oder: Es gibt $F(\theta) \geq 0$, so daß $|S_{n_k+m_k}(e^{i\theta}, f)| \leq F(\theta)$, $\int_0^{2\pi} [F(\theta)]^\delta d\theta < \infty$. *W. Meyer-König.*

Petracca Antonio und Beppo Levi: Ergänzung zu der Note: Untersuchung einer mehrdeutigen Funktion. Math. Notae 12/13, 48—49 (1952) [Spanisch].

In der im Titel erwähnten Note (vgl. dies. Zbl. 45, 182) haben Verf. über die dort behandelten Reihen auch folgendes Theorem ausgesprochen, dessen Beweis jetzt nachgeholt wird: Für $1/e \leq \varrho < 1$ läßt sich auf unendlich viele Weisen durch passende Wahl der Folge $\{k_n\}$ erreichen, daß die Partialsummen einen einzigen beliebig vorgeschriebenen Häufungspunkt besitzen. Haben sie mehr als einen, dann erfüllen diese ein Kontinuum, das gleichfalls willkürlich vorgegeben werden darf. *E. Lammel.*

Piranian, G., C. J. Titus and G. S. Young: Conformal mappings and Peano curves. Michigan math. J. 1, 69—72 (1952).

R. Salem und A. Zygmund [Duke math. J. 12, 569—578 (1945)] gaben Klassen von Lückenreihen $g(z) = \sum a_k z^{n_k}$ ($\sum |a_k| < \infty$) an mit der Eigenschaft, daß $|z| = 1$ durch $g(z)$ auf eine Peano-Kurve abgebildet wird. Daß ein solches Vorkommnis überhaupt möglich ist, zeigen die Verf. auf sehr einfache Weise. Eine Funktion $f(z)$ wird konstruiert, die in $|z| < 1$ regulär, in $|z| \leq 1$ stetig ist und für die die Punktmenge $f(e^{i\theta})$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) genau ein Quadrat ausfüllt. *W. Meyer-König.*

Cowling, V. F. and G. Piranian: On the summability of ordinary Dirichlet series by Taylor methods. Michigan math. J. 1, 73—78 (1952).

Das Taylorsche Summierungsverfahren der Ordnung α [circle method; statt $\sum_{n=0}^\infty c_n$ wird $\sum_{n=0}^\infty c'_n$ mit $c'_n = (1 - \alpha)^n \sum_{k=n}^\infty \binom{k}{n} \alpha^{k-n} c_k$ betrachtet] wird auf

Dirichletsche Reihen (1) $\sum_{n=0}^\infty a_n (n+1)^{-s}$ angewandt. Dabei sei $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = 1/R < \infty$, $0 < \alpha < 1/3$, $\alpha < R$. Satz 1: Ist (1) summierbar bei $s = s_0$, so ist (1) absolut summierbar in der Halbebene $\Re s > 1 + \Re s_0$. Satz 2: Ist (1) absolut summierbar bei $s = s_0$, so ist (1) absolut summierbar in der Halbebene $\Re s > \Re s_0$. *W. Meyer-König.*

Mira Fernandes, A. De: Una generalizzazione della serie di Fourier. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 105—110 (1952).

Entwicklung einer periodischen und in einem Parallelstreifen holomorphen Funktion nach positiven und negativen Potenzen einer zweiten periodischen Funktion derselben Periode (mit gewissen Monotonieeigenschaften bezüglich ihres Absolutbetrages) entsprechend einer von Gomes Teixeira angegebenen Verallgemeinerung der Laurentreihe.
V. Garten.

San Juan Llosá, Ricardo: Grundlagen einer allgemeinen Theorie der divergenten Reihen. V, VI. Revista Acad. Ci. Madrid 46, 257—271, 383—439 (1952) [Spanisch].

[Pour les §§ I—IV voir ce Zbl. 45, 175]. — V. Soit $f(z)$ définie dans un domaine R du plan complexe ou d'une surface de Riemann, l'origine étant à l'intérieur ou sur le contour de R . Soit $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (développement asymptotique) pour $z \rightarrow 0$ avec les bornes

$m_n^{(p)} (p \geq 0; n = 0, 1, 2, \dots; m_n^{(0)} = m_n)$ c'est à dire $\left| f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p \right| |z|^{p-n} \leq m_n^{(p)}$ ($z \in R, n = 0, 1, 2, \dots$). Si R est borné, $|z| < r$ ($z \in R$), on a $m_n^{(p)} r^{p'-p} \leq m_n^{(p')} \leq m_{n+p-p'}^{(p)}$ + $m_n r^{p'} + m_{n+1} r^{p'+1} + \dots + m_{n+p-p'+1} r^{p-1}$, ($p > p'$). Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $|z| < r$, on a

$m_n = r_1^{-n} (r_2 - r_1)^{-1}$, $r_1 < \max |z|$, $z \in R$; $r_1 < r_2 < r$. Si $f(z) = \int_0^{\infty} (1 + tz)^{-1} d\psi(t)$, t réel,

$\psi(t)$ non décroissante et $a_n = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n d\psi(t) = (-1)^n \mu_n$, il résulte $m_n = \frac{\mu_n}{d}$ dans le

domaine angulaire $\pi - \delta \leq \varphi \leq \pi + \delta$, $\varphi = \arg z$, d étant la distance de l'origine aux demi-droites $\arg(z-1) = \pi \pm \delta$. Si $a_i = (-1)^i \mu_n$ pour $i = hn$ et $a_i = 0$ pour $i \neq hn$ on a $m_i = C(\delta) \mu_{i/n}$ dans $|\varphi| < \pi h^{-1} - \delta$, $C(\delta)$ étant indépendant de z et de R . La somme d'une

série de puissances $\sum a_n z^n$ avec des moments $\mu_n = \int_0^{\infty(\varphi_0)} \alpha(t) t^n dt$, c'est à dire $f(z) = \int_0^{\infty(\varphi_0)} \alpha(t) \Phi(tz) dt$

a le développement asymptotique $f(z) \sim \sum a_n z^n$ avec les bornes $m_n = M_n C_n$ dans $-\varphi_0 - \delta \leq \varphi \leq -\varphi_0 + \delta$ si $\Phi(t) \sim \sum a_n \mu_n^{-1} t^n$ avec les bornes M_n dans $-\delta \leq \theta \leq \delta$, ($\theta = \arg t$)

et si les intégrales $\int_0^{\infty(\varphi_0)} |\alpha(t) t^n dt| = C_n$ sont convergentes. Corrélativement, si $\mu_n =$

$\int_0^{\infty(\varphi_0)} \Phi(t) t^n dt < \infty$ et $\alpha(t) \sim \sum a_n \mu_n^{-1} t^n$ sur $\theta = \varphi_1$ (égal ou non à φ_0) et si $\int_0^{\infty} |\Phi(r e^{i\theta})| r^n dr < C_n$

dans $\varphi_0 - \delta \leq \theta \leq \varphi_0 + \delta$, il en résulte $f(z) \sim \sum a_n / z^{n+1}$ avec les bornes $m_n = M_n C_n$ dans $\varphi_0 - \varphi_1 - \delta \leq \varphi \leq \varphi_0 - \varphi_1 + \delta$. L'A. fait application de ces théorèmes pour obtenir le développement asymptotique de l'intégrale de Laplace dans un angle intérieur, usée dans certains exposés de la théorie de ce développement. — VI. Aux buts indiqués dans les §§ antérieurs l'A. établit le théorème fondamental suivant: Soit $\Phi(t)$, ($t = r e^{i\theta}$), holomorphe dans $\varphi_0 - \delta < \theta < \varphi_0 + \delta$ et $\Phi(t) = o(t^{-p})$, $p > 0$, $t \rightarrow \infty$, dans $\varphi_0 - \delta' \leq \theta \leq \varphi_0 + \delta'$, $\delta' < \delta$. Soit $\alpha(t)$ (fonction réelle ou complexe) indéfiniment dérivable sur $\theta = \varphi_1$ et $|\alpha^{(n)}(t)| < M_n M(t)$, $|\alpha^{(n)}(t) - \alpha^{(n)}(0)| < M'_n M(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$; M_n, M'_n indépendantes de t . Quant à $M(t) \geq 0$ elle est supposée non décroissante et liée avec $\Phi(t)$ par les conditions: 1. Il existe une fonction $\chi = \chi(\varphi)$, $0 \leq \chi \leq +\infty$ telle que pour chaque φ de $\varphi_0 - \varphi_1 - \delta < \varphi < \varphi_0 - \varphi_1 + \delta$ et chaque $n = 0, 1, 2, \dots$

on ait $M(\chi t) \Phi^{-n}(e^{i\varphi_1} t) = o(t^{-p})$ $\left(\Phi^{-1}(t) = \int_t^{\infty(\varphi_0)} \Phi(t_1) dt, \Phi^{-(n)}(t) = \int_t^{\infty(\varphi_0)} \Phi^{-(n-1)}(t_1) dt_n \right)$;

tandis que $M(\chi t) \Phi(e^{i\varphi_1} t) = o'(t^{-p})$ uniformément pour $t \rightarrow \infty$ dans $\varphi_0 - \varphi_1 - \delta' \leq \varphi \leq \varphi_0 - \varphi_1 + \delta'$, $\delta' < \delta$. 2. Il existe une autre fonction $g(\varphi)$, $0 \leq g(\varphi) \leq +\infty$ dans $\varphi_0 - \delta < \varphi < \varphi_0 + \delta$ et des constantes C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) telles que

$$g(\varphi, n) = \int_0^{\infty} M(\chi t e^{i\varphi_1 i}) |\Phi^{-(n)}(t e^{i(\varphi + \varphi_1 i)})| dt < C_n g(\varphi + \varphi_1)$$

dans $\varphi_0 - \varphi_1 - \delta < \varphi < \varphi_0 - \varphi_1 + \delta$. Sous ces hypothèses l'intégrale $\int_0^{\infty(\varphi_1)} \alpha(t) \Phi(tz) dt$ définit une fonction holomorphe $f(z)$ dans l'angle $\varphi_0 - \varphi_1 - \delta < \varphi < \varphi_0 - \varphi_1 + \delta$ admettant le développement asymptotique $f(z) \sim \sum (\mu_\nu/\nu!) \alpha^{(\nu)}(0) z^{\nu-1}$ avec les bornes $m_n^{(1)} = C_{n-1} M_{n-1}$ et $m_n^{(2)} = C_{n-2} M'_{n-2}$ dans le domaine défini par $\varrho \geq 1: \chi(\varphi)$, $\varrho \geq g(\varphi + \varphi_1)$, $\varphi_0 - \varphi_1 - \delta < \varphi < \varphi_0 - \varphi_1 + \delta$. L'A. ajoute deux théorèmes auxiliaires qui permettent de déduire les conditions imposées aux primitives $\Phi^{(-n)}$ des propriétés de Φ . L'application du théorème fondamental à la transformation de Laplace donne le développement asymptotique dans tout le demiplan (sans réduction à un angle intérieur). L'A. fait aussi application à la transformation de Mittag-Leffler $f(z) = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \alpha(t) \exp\{- (tz)^{1/\beta}\} (tz)^{1/\beta-1} dt$ ($\beta > 0$) moyennant les théorèmes

auxiliaires. En appliquant ces mêmes théorèmes à la transformation $f(z) = \int_0^\infty \alpha(t) (tz)^\lambda e^{-tz} dz$ avec $\lambda = \xi + i\eta$, $\xi > -1$ il obtient un des théorèmes utilisés par l'A. dans un travail antérieur (ce Zbl. 46, 315). Quelquesuns de ces résultats furent déjà publiés par l'A. sous forme beaucoup moins générale (voir ce Zbl. 43, 66). Le mémoire continue. P. Puig Adam.

San Juan, Ricardo: Les fondements d'une théorie générale des séries divergentes. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 45—76 (1952).

Verf. sucht zu einer allgemeinen Theorie der divergenten Reihen über den Begriff der asymptotischen Konvergenz zu kommen. Ist $f(z)$ stetig in einem Bereich D , der den Ursprung als Häufungspunkt besitzt, so soll (1) $f(z) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ besagen, daß für $n > n_0$ positive obere

Schranken m_n mit $|f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu| |z|^{-n} < m_n$ in D existieren. Verf. diskutiert, wann von

$f(z) \sim \sum_0^\infty a_n z^n$ auf $f(z) \sim \sum_1^\infty (-n) a_n z^{n-1}$ geschlossen werden kann, und untersucht die Frage

der eindeutigen Bestimmtheit von $f(z)$ durch seine asymptotische Entwicklung (vgl. auch Verf., dies. Zbl. 28, 355). Dabei spielt der Begriff der Funktionen „optimaler Approximation“ eine Rolle, für die bei gegebenen a_n die Schranken m_n von einer Stelle ab kleinstmöglich sind; dieser

Fall wird durch (2) $f(z) \simeq \sum_0^\infty a_n z^n$ bezeichnet. Hinreichende Kennzeichen dafür werden auf-

gestellt und formale Eigenschaften des Zeichens \simeq entwickelt, die die Addition, Differentiation, Integration usw. betreffen. Es geht nun aber nicht an, im Fall (2) einfach $f(z)$ als die Summe von $\sum a_n z^n$ anzusprechen, denn das Zeichen \simeq hängt von D ab. Einen Ausweg findet Verf. durch eine geeignete Definition des Begriffes „radiale Fortsetzung“. — Weitere Untersuchungen betreffen das Problem der Zerlegung einer reellen Funktion in die Summe zweier Funktionen mit vorgegebenen Momenteigenschaften bzw. Größenordnungseigenschaften der Ableitungen und die

Bildung von nicht identisch verschwindenden Funktionen (3) $f(z) = \sum_{\nu=0}^\infty A_\nu/(1 + \mu_\nu z)$ mit $f^{(n)}(0) = 0$. Aus (3) gewinnt Verf. durch Laplace-Transformation Paare von Funktionen, die verschieden sind und gleiche asymptotische Entwicklung besitzen. W. Meyer-König.

San Juan, Ricardo: Hinreichende Bedingungen für die radiale Fortsetzung. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 185—195 (1952) [Portugiesisch].

Der Verf. stellt die hinreichenden Bedingungen auf dafür, daß die günstigste asymptotische Annäherung einer Reihe mit der radialen Fortsetzung übereinstimmt. In einigen Fällen sind diese Bedingungen im Satz von Fabry einbegriffen, der die Existenz radialer Fortsetzungen behauptet, wenn die gewöhnliche analytische Fortsetzung von $\sum a_n z^n$ mit einem von Null verschiedenen Konvergenzradius existiert. Die Ergebnisse des Verf. in der Theorie der ganzen Funktionen mit regulärem Wachstum erlauben neue und wichtige Kriterien abzuleiten, wenn der Satz von Fabry nicht benutzt werden kann, wie z. B. bei gewissen Reihen, die Hardy untersucht hat.

J. M^a. Orts.

MacLane, G. R.: Sequences of derivatives and normal families. J. Analyse math. 2, 72—87 (1952).

The author proposes and studies the following problem: Given $f(z)$ holomorphic in a domain D of the z -plane, what functions are obtainable as limits of subsequences of the sequence of derivatives $f^{(n)}(z)$? The author proves: Let $f(z)$ be holomorphic in D and let $z = a$ be a point of D .

A necessary and sufficient condition for the sequence $f^{(n)}(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) to form a normal family, which does not admit the constant infinity as a limit function, in some neighborhood of $z = a$ is $|f^{(n)}(a)| \leq A$ ($n \geq 0$, A constant); if this condition is satisfied, then $f(z)$ is an entire function. Starting from this theorem, the author obtains some theorems on the possible structure of the set of limit functions derivable from such a finitely normal family of derivatives. Furthermore, several examples of functions for which the family of derivatives is normal and admits infinity as a limit. This paper is concluded with the following interesting theorem.

There exists an entire function $F(z)$ with the following properties: (1) $|F(z)| = O(e^{(1+\varepsilon)|z|})$ for any $\varepsilon > 0$ and (2) if D is any simply connected domain and $\varphi(z)$ is any function holomorphic in D , then there exists a subsequence $\{n_j\}$ of the positive integers such that $F^{(n_j)}(z) \rightarrow \varphi(z)$, $j \rightarrow \infty$, uniformly in any compact subset of D .
K. Noshiro.

Grunsky, H.: Über Tschebyscheffsche Probleme. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 241—246 (1952).

Ein Tschebyscheffsches Problem liegt vor, wenn jeder Funktion $F(z)$ aus einer gewissen Klasse \mathfrak{K} das Maximum $A(F)$ zugeordnet wird, das $|F(z)|$ auf einer gegebenen abgeschlossenen Punktmenge \mathfrak{M} besitzt, und wenn gefragt wird nach derjenigen (Einzigkeit angenommen) Funktion F_0 , für die $A(F)$ minimal ist. — Am Beispiel der Tschebyscheffschen Polynome (\mathfrak{K} ist die Klasse der normierten Polynome n -ten Grades) wird eine Methode entwickelt, die solchen Problemen angemessen ist. Sie beruht auf der Tatsache, daß die Lösung eines Tschebyscheffschen Problems bez. \mathfrak{M} identisch ist mit der Lösung des Problems für diejenige Untermenge \mathfrak{M}_1 , auf der das F_0 des ersten Problems das Maximum seines Betrages annimmt. Fällt man nun die Funktionen aus \mathfrak{K} auf als eine Funktion ihrer Nullstellen und des Parameters z , so besagt die genannte Tatsache, daß es zu jeder Variation der Variablen (Nullstellen) mindestens ein $z \in \mathfrak{M}_1$ gibt, für das der Logarithmus des Betrages dieser Funktion ein Minimum (im gewöhnlichen Sinne) besitzt, das gerade für diejenigen Werte der Variablen angenommen wird, durch die die Lösung des Tschebyscheffschen Problems charakterisiert ist. Die Auswertung dieses Gedankens ergibt für den Fall der Tschebyscheffschen Polynome von neuem einige bekannte Resultate. — Sodann wird diese Methode angewandt auf folgendes Problem von J. L. Walsh und M. Heins: \mathfrak{M} sei der Kreis $|z| = r < 1$ und \mathfrak{K} die Menge der in $|z| < 1$ regulären Funktionen $F(z)$ mit der dort gültigen oberen Beschränkung $|F(z)| \leq 1$; ferner sei eine feste Stelle z_0 mit $r < |z_0| < 1$ gegeben, an der die Funktionen aus \mathfrak{K} nach unten beschränkt sind durch $|F(z_0)| \geq \mu$ bei festem $\mu > 0$. Die Lösung des zugehörigen Tschebyscheff-Problems ist eine rationale Funktion, für deren Grad n sich ergibt: $n = p$ bzw. $n = [p] + 1$, wenn $\mu = |z_0|^p$ ist, je nachdem p ganz ist oder nicht.
H. Tietz.

Lokki, Olli: Über das Randwertproblem der analytischen Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 144, 8 p. (1952).

Let Γ be the analytic boundary of a domain D of finite connectivity. The author proves, by means of an extremal problem, that there exists a function $f(z)$, regular in D , such that $\log |f(z)|$ assumes prescribed bounded values on Γ .

L. Carleson.

Gachov, F. D.: Das Riemannsche Randwertproblem für ein System von n Funktionenpaaren. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4, 3—54 (1952) [Russisch].

Im Anschluß an die auf Riemann zurückgehende Fragestellung nach der Existenz einer linearen Differentialgleichung mit vorgegebener Monodromiegruppe, die erstmalig von Hilbert durch Zurückführung auf eine Fredholm'sche Integralgleichung mit Hilfe von Greenschen Funktionen gelöst wurde, ergibt sich folgende Randwertaufgabe, die vorliegendem Bericht zugrunde liegt: Gegeben ist ein Rand L , bestehend aus einer Anzahl geschlossener, glatter Kurven, deren eine alle anderen umschließt, der in der komplexen Ebene einen zusammenhängenden Bereich D^+ begrenzt und von dem Komplementärbereich D^- , welcher den unendlich fernen Punkt enthält, abtrennt. Gesucht ist ein Paar von auf D^+ bzw. D^- holomorphen Funktionen $\varphi^+(z)$ und $\varphi^-(z)$ mit auf L stetigen Grenzwerten $\varphi^+(t)$ und $\varphi^-(t)$, die dort der linearen Randbedingung $\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + b(t)$ genügen. $A(t)$ und $b(t)$ sind auf L gegeben und sollen die Hölder'sche Bedingung erfüllen, außerdem soll $A(t)$ nirgends auf L verschwinden. — Diese Aufgabe hat eine weitgehende Entwicklung durch verschiedenartige Verallgemeinerungen und Anwendungen, vornehmlich gefördert durch sowjetische Mathematiker, ausgelöst, die Gegenstand dieses Berichtes ist. Verf. hat selbst an der Entwicklung wesentlichen Anteil genommen. In der Hauptsache sind folgende Etappen der Entwicklung zu vermerken: Plemelj [Monatsh. Math. Phys., 19, 211—245 (1908)]: Behandlung mit Cauchyschen Integralen an Stelle der Greenschen Funktionen, was eine wesentliche Vereinfachung mit sich bringt; Privalov (dies. Zbl. 11, 311): Allgemeine Lösung der Aufgabe im inhomogenen Fall $b(t) \not\equiv 0$; Gachov (dies. Zbl. 21, 143): Verallgemeinerung auf den n -dimensionalen Fall, d. h. auf n Paare gesuchter analoger Funktionen, definiert auf D^+ bzw. D^- , die einem entsprechenden linearen Gleichungssystem von n linearen Randbedingungen mit veränderlichen Koeffizienten und rechten Seiten, die die

Höldersche Bedingung erfüllen (mit einer auf L nicht verschwindenden Determinante der Koeffizientenmatrix), genügen sollen; Muschelišvili und Vekua, Trudy Tbiliss. Math. Inst., **12**, 1—46 (1943]: a) Zusammenhang mit den singulären Integralgleichungen (s. u.), b) Einführung von Matrizen im n -dimensionalen Fall und seine konsequente Behandlung mit der Methode der Funktionentheorie der Matrizen. In Matrixschreibweise bleibt obige Form der Randbedingung dabei erhalten, aber nunmehr bedeuten $\varphi^+(z)$ und $\varphi^-(z)$ zwei n -dimensionale Vektorfunktionen, in welche die n Funktionenpaare zusammengefaßt sind, $A(t)$ die n -reihige Matrix der gegebenen Koeffizienten der linearen Randbedingungen ($\det \|A(t)\| \neq 0$) und $b(t)$ die ihre rechten Seiten zusammenfassende Vektorfunktion. So gefaßt, liegt das Zentralproblem des Berichtes vor. Alle w. u. folgenden Formeln sind ebenfalls als Vektorgleichungen mit Verwendung von Matrizen zu verstehen, c) Einführung eines kanonischen Lösungssystems der homogenen Aufgabe $b(t) \equiv 0$ [n Lösungen der geringsten Ordnung im Unendlichen, die linear unabhängig (mit Polynomkoeffizienten bei der linearen Beziehung) sind] und der daraus gebildeten kanonischen Matrix. Allgemeine Lösung der homogenen und der inhomogenen Aufgabe mit Hilfe der kanonischen Matrix. Dabei Einführung und Verwendung des grundlegenden Begriffes der partiellen Indizes der Spalten der Matrix, das sind die niedrigsten Ordnungen im Unendlichen der jeweils in einer Spalte auftretenden Elemente, sowie ihr Zusammenhang mit den Elementarteilen der Matrix, und des summarischen Index der Matrix sowie seine Darstellung durch die Determinante der Matrix $A(t)$ (im Anschluß an die von Hensel und Landsberg dargestellte Theorie der linearen Transformationen für Matrizen, deren Elemente Funktionen sind [Theorie der algebraischen Funktionen, Leipzig 1902]); Gachov (dies. Zbl. **41**, 48; **48**, 59): a) Einzelfall, in dem die Lösung explizit durch lineare Transformationen und Quadraturen konstruiert werden kann: $A(t) = \Omega(t) U(t)$, wo die Elemente der Matrix $\Omega(t)$ in D^+ holomorph sind mit Ausnahme von endlich vielen Stellen, wo sie Pole haben können, und diejenigen von $U(t)$ denselben Charakter in D^- haben, b) Abänderungen im Lösungsverlauf und in der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen sowie derjenigen der Lösbarkeitsbedingungen für $b(t)$, die sich ergeben, wenn zugelassen ist, daß die Elemente von $A(t)$ auf L an endlich vielen Stellen Pole besitzen und $\det \|A(t)\|$ dort endlich viele Nullstellen hat; Vekua (Systeme singulärer Integralgleichungen und einige Randwertprobleme, Moskau 1950, dies. Zbl. **41**, 429), Magnaradze (dies. Zbl. **36**, 334), Gachov (dies. Zbl. **41**, 47): Zulassung von endlich vielen Unstetigkeitsstellen der Art $A(t-0) \neq A(t+0)$ auf L für die Elemente der Koeffizientenmatrix sowie der hierauf zurückführbare Fall von nicht geschlossenen Teilen des Randes L ; Mosis [Mitt. Univ. Kasan **110**, Nr. 7, 51—60 (1950) und Diss., Kasan 1950]: Algebraische Funktionen als Elemente der Koeffizientenmatrix: $\varphi^+(t) = A(t, w(t)) \varphi^-(t) + b(t, w(t))$, wo w mit z durch die algebraische Gleichung $f(z, w) = 0$ verknüpft ist. Behandlung der beiden Fälle: Geschlecht der Gleichung $= 0$ oder 1 durch Uniformisierung; Čibrikova (Diss. Kasan 1950): Im Anschluß an die Fragestellung von Haseman im Sonderfall $n = 1$ (Diss. Göttingen 1907) das Auftreten von Grenzwerten in der Randbedingung, die von innen und außen nicht an derselben, sondern an zwei verschiedenen Stellen erreicht werden: $\varphi^+[\alpha(t)] = A(t) \varphi^-(t) + b(t)$, wo $\alpha(t)$ eine Funktion ist, die den Rand L umkehrbar eindeutig in sich transformiert und eine nicht verschwindende Ableitung hat. — Einen breiten Raum nimmt im Bericht ferner der Zusammenhang der in Rede stehenden Randwertaufgabe mit der Theorie der singulären Integralgleichungen ein. Bekanntlich ist die Randwertaufgabe äquivalent der Lösung eines Systems von singulären Integralgleichungen vom Typus $C(t) \omega(t) + \frac{D(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau = g(t)$. Beide Aufgaben gehen

auseinander hervor durch die Substitution: $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z} d\tau$ bzw. umgekehrt $\omega(t) =$

$\varphi^+(t) - \varphi^-(t)$. Die Auswirkung aller oben angegebenen Ergebnisse der Theorie der Randwertaufgabe auf die entsprechenden Fälle der Theorie der singulären Integralgleichungen wird im einzelnen betrachtet. Der oben angeführte Typus einer singulären Integralgleichung, der auch Hauptgegenstand der Behandlung im Lehrbuch von Kupradze ist (dies. Zbl. **45**, 203), noch ergänzt auf der linken Seite durch ein Integral $\int_L K(t, \tau) \omega(\tau) d\tau$ mit einem Fredholmschen

Matrizenkern $K(t, \tau)$, läßt sich bekanntlich äquivalent-regularisieren, d. h. durch Anwendung eines geeigneten Operators auf eine äquivalente Integralgleichung vom Fredholmschen Typus zurückführen und damit lösen. Hierzu werden abrundende und vereinfachende Ergänzungen nach Ganin angegeben (dies. Zbl. **43**, 106), wonach das System sich genau dann regularisieren läßt, wenn es lösbar ist. Schließlich werden nach Krikunov und Ganin noch allgemeinere einschlägige Randwertaufgaben betrachtet, in deren Randbedingungen neben den gesuchten Vektorfunktionen $\varphi^+(t)$ und $\varphi^-(t)$ noch ihre Ableitungen und mit ihnen gebildete Integrale auftreten. Hier sei nur die von Krikunov in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit betrachtete Form angeben:

$$\sum_{k=0}^m \left[a_k(t) \frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k} + \int_L A_k(t, \tau) \frac{d^k \varphi^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] - \sum_{k=0}^n \left[b_k(t) \frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k} + \int_L B_k(t, \tau) \frac{d^k \varphi^-(\tau)}{d\tau^k} d\tau \right] = f(t)$$

mit zusätzlichen Bedingungen, die den früheren entsprechen. $A_k(t, \tau)$ und $B_k(t, \tau)$ bedeuten dabei Matrizenkerne, für die die Fredholmsche Theorie gültig ist. Mit dieser Randwertaufgabe ist in gleicher Weise wie früher das System der Integro-Differentialgleichungen mit der unbekannten Vektorfunktion $\omega(t)$ und analogen Matrizenkernen verknüpft:

$$\sum_{k=0}^p \alpha_k(t) \omega^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^q \left[\beta_k(t) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L N_k(t, \tau) \omega^{(k)}(\tau) d\tau \right] = f(t).$$

Krikunov gewinnt ihre Lösung, indem er sie durch eine der früheren ähnliche Substitution auf ein System normaler singularer Integralgleichungen, dessen Lösung schon durch den Regularisierungsprozeß geleistet ist, zurückführt mit Hilfe einer neuartigen Integraldarstellung des holomorphen Funktionenpaares $\varphi^+(z)$ und $\varphi^-(z)$, falls $\varphi^{+(m)}(z)$ und $\varphi^{-(n)}(z)$ auf L existieren und der Hölderschen Bedingung genügen und $\varphi^-(z)$ im Unendlichen verschwindet:

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \mu(\tau) (\tau - z)^{m-1} \ln \left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k z^k}{k!}, \\ \varphi^-(z) &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau^n} \left[(\tau - z)^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\tau}{z}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} B_k \tau^{n-k-1} z^k \right] d\tau \end{aligned}$$

mit einer geeigneten, gemeinsamen, auf L definierten komplexen Vektorfunktion $\mu(\tau)$ und den konstanten Vektoren C_k und B_k . Dabei sind die Zweige der Logarithmen zu wählen, deren Werte im Nullpunkt und im unendlich fernen Punkt verschwinden. — Betreffs der Einzelheiten muß auf die Referate über die einzelnen einschlägigen Arbeiten verwiesen werden, z. B. dies. Zbl. 41, 47; 48, 59. Seine eigenen Ergebnisse hat Verf. z. T. wörtlich aus seinen früheren Veröffentlichungen übernommen. Am Schluß gibt er einen Hinweis, nach welcher Richtung im Ausbau der Funktionentheorie der Matrizen er sich weitere Erfolge für die Theorie der Riemannschen Randwertaufgabe verspricht.

E. Svenson.

Huber, Alfred: Über Wachstumseigenschaften gewisser Klassen von subharmonischen Funktionen. Conventium math. Helvet. 26, 81—116 (1952) = Diss., Zürich: Art. Institut Orell Füssli A. G. 1952.

Etude des fonctions sousharmoniques $u(z)$ dans tout le plan avec des hypothèses sur $M(r) = \max_{|z|=r} u(z)$; on pose $m(r) = \inf_{|z|=r} u(z)$, $\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\log r}$. Utilisant des travaux de Wiman et de M. Heins (M. Heins, ce Zbl. 29, 298), l'A. étudie les fonctions sousharmoniques d'ordre $\rho < 1$, et généralise deux résultats donnés par Besicovitch [Math. Ann. 97, 677—695 (1927)] pour les fonctions $\log |f(z)|$, $f(z)$ entière. On a $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r)}{M(r)} \geq \cos \pi \rho$ et la densité supérieure de l'ensemble $E[m(r) > M(r) \cos \pi \rho']$ est aux moins égale à $1 - \rho/\rho'$. — Etude des cas particuliers $\rho = 0$, $M(r) = O(\log r)$. — Dans la seconde partie l'A. donne une extension du théorème de Phragmén-Lindelöf à certains domaines de l'espace R^n s'étendant à l'infini selon une méthode employée par J. Deny et P. Lelong (ce Zbl. 33, 64) pour le cylindre et le cône (une étude précise pour le cas des demi-espaces R^n a été faite par J. Lelong, ce Zbl. 33, 373). Pour l'inégalité fondamentale utilisée par l'A. v. aussi A. Dinghas, ce Zbl. 42, 84.

P. Lelong.

• **Goluzin, G. M.:** Geometrische Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 540 S. R. 16,35 [Russisch].

Der Verf. hinterläßt bei seinem allzufrühen Tode (Januar 1952) ein Werk, das einen großen Teil seiner schönen funktionentheoretischen Arbeiten zu einer eindrucksvollen Darstellung der geometrischen Funktionentheorie zusammenfaßt; zugleich vermag es an Forschungsfragen heranzuführen, denen Arbeit und Lehre Goluzins in den letzten zwei Jahrzehnten vornehmlich gegolten hat; zugleich werden Brücken zu verwandten Untersuchungen geschlagen. Kein Funktionentheoretiker wird an diesem Buch vorübergehen dürfen; es wäre sehr zu begrüßen, wenn eine kompetente Übersetzung in eine der westlichen Sprachen erscheinen könnte. — Im besonderen werden behandelt: Schlichte Abbildung einfach und mehrfach zusammenhängender Gebiete; die Herstellung dieser Abbildung bei einfachem Zusammenhang (dabei Parameterdarstellung und Variation schlichter Funktionen); Extremalprobleme und Abschätzungen bei Klassen schlichter Funktionen; Schlichte Abbildung, bzw. Abbildung über mehrblättrige Kreise, bei mehrfachem Zusammenhang. Metrische Eigenschaften abgeschlossener Mengen der Ebene

(Transfiniten Durchmesser, Harmonisches Maß; Anwendung auf beschränktartige Funktionen). Majorantenprinzipien: Schwarz'sches Lemma, Prinzip von Lindelöf, Hyperbolische Metrik, Harmonisches Maß; Anzahl der Zielwerte bei ganzen Funktionen; Überkonvergenz; Verallgemeinerung auf nichtanalytische Abbildungen, Überdeckungssätze; subordinierte Funktionen. Randprobleme für analytische Funktionen im Kreis, bzw. in Gebieten mit streckbarem Rand: Integraldarstellungen; Cauchyintegral, Ergebnisse von Privalov, Verschiedene Funktionenklassen, insbes. H_p . Verschiedene Ergänzungen betreffen u. a. Verheftungssätze, Extremalprobleme zu mehrfach zusammenhängenden Gebieten. *E. Ulrich.*

Kolbina, L. I.: Zur Theorie der schlichten Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 1127—1130 (1952) [Russisch].

Parameterdarstellung nach Löwner wird in Verallgemeinerung von Untersuchungen Goluzins [z. B. Mat. Sbornik 29, 197 (1951), dies. Zbl. 44, 306, 2. Referat] auf

$$\log \frac{F(\zeta_v) - F(\zeta_\kappa)}{\zeta_v - \zeta_\kappa} = \sum_{r,l=1}^{\infty} a_{rl} \zeta_v^{-r} \zeta_\kappa^{-l}, \quad |\zeta_v| < 1, \quad |\zeta_\kappa| < 1$$

angewandt. Mit Hilfe mehrerer Sätze von Hilfsgrößen (in je endlicher Anzahl) werden dann Linearverbindungen aus obigen Logarithmen und endlichen, aber mehrfachen Summen vom Typus der rechten Seite gebildet und so abgeschätzt, daß die Besonderheit der schlichten Funktionen $F(\zeta)$ bzw. ihrer Entwicklungskoeffizienten a_{rl} entfernt, also eine allgemein gültige Schätzung erzielt wird. Die Parameterdarstellung wird mit Integralausdrücken für die Koeffizienten a_{rl} verknüpft und der Schwarz'schen Ungleichung unterworfen. — $F(\zeta)$ wird aus der Klasse Σ gewählt; ähnliches für $f(z)$ aus S (wie bei Goluzin). — Die große Zahl der eingeführten Hilfsgrößen erlaubt es, eine Reihe von Sätzen zusammenzufassen, die teils länger bekannt sind, teils erst kürzlich von Schiffer (dies. Zbl. 33, 363) Goluzin und Lebedev (Diss., Leningr. Gosud. Univ. 1951) bewiesen wurden. *E. Ulrich.*

Potugina, I. V.: Zur Frage der Koeffizientenabschätzung der ungeraden schlichten Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 1215—1217 (1952) [Russisch].

Eine von V. Levin gegebene Schranke für die Koeffizienten c_n der ungeraden schlichten Funktion $z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots$ wird verbessert zu $|c_n| < 2,78$. *E. Ulrich.*

Schaeffer, A. C. and D. C. Spencer: Coefficient regions for schlicht functions. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 224—232 (1952).

An expository account of the coefficient problem for the class S of functions $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$, schlicht in $|z| < 1$. More precisely, the problem is to determine the region of variability V_n for all points (a_2, a_3, \dots, a_n) associated with S in $(n-1)$ -dimensional complex space. After a preliminary discussion of earlier methods a thorough account is given of the variational methods first introduced into the theory of the class S by M. Schiffer (this Zbl. 19, 222) and then exploited extensively for the determination of V_n by the authors (cf. Schaeffer and Spencer, Coefficient regions for schlicht functions, New York 1950).

W. W. Rogosinski.

Schiffer, Menahem: Variational methods in the theory of conformal mapping. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 233—240 (1952).

Aus den funktionentheoretischen Extremalproblemen erwächst naturgemäß die folgende Fragestellung: Wie ändert sich die Greensche Funktion (oder eine andere Gebietsfunktion), wenn sich das betrachtete Gebiet in vorgeschriebener Weise ändert? Hadamard hat diese Frage schon 1908 beantwortet für den Fall, daß der Rand glatt und die Variation eine Verschiebung der Randpunkte längs der Normalen ist. Verf. hat diese Methode von der einengenden Voraussetzung betreffend den Rand befreit (1938); das ist wesentlich, da man gerade bei den Anwendungen auf Extremalprobleme nicht von vornherein weiß, ob jene Voraussetzung für das Extremalgebiet zutrifft. — Eine wesentliche Verallgemeinerung einer Juliaschen Formel (1922) [die als Grenzfall die Löwnersche Differentialgleichung (1923) enthält] erlaubt es, sehr weitgehende Verallgemeinerungen der Probleme der schlichten Funktionen in Angriff zu nehmen (Schiffer und Spencer, dies. Zbl. 41, 409). — Die Durchführung der Anwendungen und ihrer Ergebnisse bleibt von der vorliegenden Skizze ausgeschlossen. *H. Grunsky.*

Schaeffer, A. C. and D. C. Spencer: A variational method for simply connected domains. Construct. Appl. conformal maps 189—191 (1952).

Soit $w = f(z)$ une fonction analytique $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, qui représente conformément $|z| < 1$ sur un domaine simplement connexe D . Soit D^* un domaine simplement connexe obtenue par une petite variation frontière, c. à d. par une variation d'un arc analytique frontière du domaine D . Les AA. donnent une explicite formule pour une fonction analytique $f^*(z) = f(z) + \varepsilon p(z)$, $f^*(0) = 0$, $f^{*'}(0) = 1$ réalisant la représentation conforme de $|z| < 1$ sur D^* . Dans la seconde partie les AA. considèrent les variations intérieures. Soit C le cercle $|z| < 1$ sans un arc analytique; par une petite variation intérieure de ce domaine on obtient un cercle unité avec un trou où avec une partie doublement couverte. Au moyen des variations intérieures de cette espèce les AA. donnent la formule pour une fonction $f^*(z)$ qui représente le cercle $|z| < 1$ sur un domaine D^* qui diffère peu de D .

J. Gorski.

Položij, G. N.: Über die Verlagerung von Randpunkten bei der Abbildung von Gebieten. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 6 (52), 203—205 (1952) [Russisch].

Seien $G^* \supset G$ zwei einfach zusammenhängende Gebiete mit einem gemeinsamen (offenen) Jordanschen Randbogen Γ . Jede konforme Abbildung $G^* \leftrightarrow G$ erlaubt höchstens drei Fixpunkte im offenen Bogen Γ ; sind wirklich drei Fixpunkte vorhanden, so sind die beiden äußeren anziehend, der mittlere abstoßend; gibt es nur zwei Fixpunkte, so ist einer anziehend, der andere nicht. Mehrere Folgerungen werden vermerkt. — Seien G, G^* einfach zusammenhängende Gebiete, die einander teilweise enthalten, aber nur zwei (offene) Jordanbogen Γ_1, Γ_2 als gemeinsame Randstücke haben; gibt es dann einen Fixpunkt in Γ_1 , so höchstens zwei in Γ_2 ; und gibt es genau zwei in Γ_2 , so ist einer anziehend, der andere abstoßend. *E. Ullrich.*

Warschawski, S. E.: On conformal mapping of variable regions. *Construct. Appl. conformal maps* 175—187 (1952).

The author gives without proofs many known results connected with the problem of dependence of the mapping function on the region. Let R be a simply connected region, which contains the point $w = 0$ whose boundary is contained in the ring $1 - \varepsilon \leq |w| \leq 1$ and $z = f(w)$ be a function which maps R conformally onto $|z| < 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. For such (nearly circular) region R two problems are considered: (i) to determine an upper bound for $|f(w) - w|$ in terms of ε and ϱ , which is valid in any circle $|w| < \varrho$ contained in R , and (ii) under additional assumptions regarding the boundary of R , to find a bound for $|f(w) - w|$ which depends only on ε . The author gives results concerning (i) and (ii) obtained by Carathéodory, Bieberbach, Müller, Warschawski and others (references are given). The second part of this note contains the analogous problems for arbitrary regions R_1, R_2 . The estimations for the integral means

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_1(r e^{i\theta}) - f_2(r e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} \quad \text{and} \quad \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'_1(r e^{i\theta}) - f'_2(r e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}$$

are also given, where $w = f_1(z)$ and $w = f_2(z)$, normalized in the usual manner, maps the circle $|z| < 1$ onto R_1 and R_2 respectively.

J. Gorski.

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Sur la représentation conforme des bandes. *J. Analyse math.* 2, 51—71 (1952).

Les résultats apportés par ce mémoire généralisent ceux de S. Warschawski (ce Zbl. 28, 403), ceux de J. Dufresnoy et de l'A. [Ferrand et Dufresnoy, *Bull. Sci. math.*, II. Sér. 69, 165—174 (1943)] et ceux de l'A. [Bull. Soc. math. France, II. Sér. 72, 178—192 (1944)]. — Une demi-bande Δ du plan $w = u + iv$ est un domaine simplement connexe, contenant un arc Δ d'équation $v = g(u)$, g étant une fonction continue définie pour $u_0 \leq u < +\infty$. Soit $w = f(z)$ la fonction qui représente conformément la bande B du plan $z = x + iy$ définie par $|y| < a/2$ sur Δ , de sorte que Δ corresponde à un arc contenu dans B qui tende vers le point frontière $+\infty$. L'A. emploie les notions de noyau d'un domaine variable D_t relatif à un point O , noté $\Omega(O, D_t)$, et de limite d'un tel domaine quand $t \rightarrow t_0$, introduites par Carathéodory [Math. Ann. 72, 107—144 (1912)], et qu'il a déjà utilisées ailleurs (ce Zbl. 46, 306). Supposons que pour un certain arc Δ , le domaine Δ_u déduit de Δ par la translation $-u - ig(u)$ converge vers la bande $|v \cos \mu - u \sin \mu| < a\lambda/2$, λ et μ étant des constantes. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit, démontre l'A., qu'il existe dans B un arc H défini par $z = h(t)$ ($0 < t < +\infty$) vérifiant les conditions suivantes: $\Re h(t) \rightarrow +\infty$ si $t \rightarrow +\infty$; si B , et Δ , sont les domaines déduits de B et Δ par les translations $-h(t)$ et $-f[h(t)]$, les noyaux $\Omega(0, B_t), \Omega(0, \Delta_t)$ quand $t \rightarrow +\infty$ ne sont pas vides; $f_t(z) = f[z + h(t)] - f[h(t)]$

a une limite $f_0(z)$ quand $t \rightarrow +\infty$, quel que soit $z \in \Omega(0, B_t)$. Pour un tel arc H , la convergence de $f_t(z)$ vers $f_0(z)$ est uniforme, et $f_0(z) = \lambda e^{i\mu} z$, λ et μ étant les constantes d'un arc A correspondant. — Etant donnée une demi-bande Δ , pour tout $u > u_0$ il existe une transversale de Δ et une seule, soit Θ_u , rencontrant A . L'A. introduit une suite σ_n croissante, tendant vers $+\infty$, telle que $\sigma_{n+1} - \sigma_n \rightarrow 0$, et considère les fonctions „en escalier“ $g_1(u), g_2(u)$, égales pour $\sigma_n < u < \sigma_{n+1}$ aux bornes supérieure v_n^+ et inférieure v_n^- des ordonnées des extrémités de Θ_u quand $\sigma_n \leq u < \sigma_{n+1}$. Pour qu'il existe un arc H , il faut et suffit qu'il existe une σ_n telle que, quand $u \rightarrow \infty$

$$(1) \quad l^{-1} [g_l(u+l) - g_l(u)] \rightarrow \operatorname{tg} \mu \quad (i = 1, 2)$$

quel que soit l fixe, et que (2) $g_2(u) - g_1(u) \rightarrow a \lambda / \cos \mu$. — Voici maintenant les principaux résultats du mémoire relatifs à la fonction f elle-même. Soient $\bar{X}(u), \underline{X}(u)$ les bornes supérieure et inférieure de x fonction de w quand w parcourt Θ_u , Δ^* le domaine engendré par Θ_u . Le complémentaire de Δ^* comprend en particulier des domaines Δ_n contenus dans Δ , ou plis de Δ , et dont la frontière relative à Δ est un intervalle rectiligne dont nous désignons l'abscisse par u_n . La pseudo-abscisse $R(w)$ d'un point w de Δ est u_n s'il est dans un Δ_n , et est égale à son abscisse dans le cas contraire. — Disons que Δ vérifie la condition K_μ s'il existe une suite σ_n et une suite $u_n \rightarrow +\infty$ telle que la limite (1) ait lieu pour les u_n . L'A. démontre que si Δ vérifie K_μ , $Rf(x+iy) - Rf(x) \rightarrow -y \sin \mu$ quand $x \rightarrow +\infty$, uniformément pour $|y| \leq a/2$. Supposons Δ

défini par $\gamma_1(u) < v < \gamma_2(u)$, γ_1, γ_2 pouvant être discontinues. Posons $I_\Delta(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{a \, du}{\gamma_2(u) - \gamma_1(u)}$.

Disons que Δ vérifie la condition L si γ_1, γ_2 sont continues et vérifient $\int_{u_1}^{\infty} \gamma_i^2(u) \, du < \infty$ ($i = 1, 2$), $\alpha < \gamma_2 - \gamma_1 < \beta$, α, β étant des constantes. L'A. rappelle l'inégalité classique de L. Ahlfors: $\bar{X}(u'') - \underline{X}(u') > I_\Delta(u', u'')$, et démontre que, si Δ vérifie L , on a $\bar{X}(u) - \underline{X}(u) \rightarrow 0$, et la différence $\underline{X}(u) - I_\Delta(u_0, u)$ a une limite finie quand $u \rightarrow +\infty$. — Si Δ contient un domaine Δ' vérifiant L , alors $\underline{X}(u'') - \bar{X}(u') - I_{\Delta'}(u', u'') + o(u'), o(u'')$ tendant vers zéro quand $u' \rightarrow \infty$. Reprenant la série σ_n , et désignant par Δ' le domaine défini par $g_1(u) < u < g_2(u)$, l'A. démontre enfin ce qui suit: supposons qu'il existe des constantes α', β' telles que $0 < \alpha' < g_2 - g_1 < \beta'$, alors, si la série $\sum (\sigma_{n+1} - \sigma_n)^2$ converge, on a $\bar{X}(u'') - \underline{X}(u') > I_{\Delta'}(u', u'') + \text{Cte}$, si elle diverge et si $\sum |v_{n+1}^+ - v_n^+| < \infty$ ($i = 1, 2$), $R\varphi(u+iv) - I_{\Delta'}(u_0, u)$ reste borné quand $u \rightarrow +\infty$, φ désignant la fonction inverse de $f(z)$. R. de Possel.

Bonder, Julian: Sur les fonctions réalisant les représentations conformes et biunivoques d'un demi-plan sur les extérieurs des arcs de certaines courbes algébriques. Czechosl. math. J. 1 (76), 203—228 (1952).

Soit AB un arc régulier appartenant à une courbe analytique L située dans le plan de la variable complexe z . Supposons que la courbe L est telle qu'il est possible de trouver une fonction algébrique $\xi = \varphi(z)$ qui transforme chaque arc AB de cette courbe L en n arcs circulaires. L'A. s'occupe de la construction de la fonction $z = f(t)$ réalisant une représentation conforme du demi-plan $\operatorname{Im}(t) > 0$ sur l'extérieur de l'arc AB du plan z . La dérivée de Schwarz de la fonction composée $\varphi[f(t)]$ est aussi une fonction algébrique du même ordre de multiplicité n que la fonction donnée $\xi = f(z)$. Si la surface R_z de Riemann de la fonction $\varphi(z)$ est de genre nul, la surface R_t de la fonction $\varphi[f(t)]$ est de genre 1 et $f(t)$ peut être exprimée en termes de fonctions elliptiques. Dans les autres cas le genre de R_t est ≥ 3 . Les cas où AB est l'arc d'une conique ou d'une courbe de Cassini sont traités en détail. J. Gorski.

Lewy, Hans: Developments at the confluence of analytic boundary conditions. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 601—605 (1952).

Es werden die folgenden zwei Probleme betrachtet: Problem A: Gesucht ist die konforme Abbildung eines Teils der oberen Hälfte einer komplexen Ebene $z = x + iy$ auf einen Bereich der oberen Hälfte einer Ebene $\zeta = u + iv$, der (neben anderen Randkurven) durch ein Stück der negativen u -Achse und ein Stück der Parabel $v = 2u^2$, die beide im Nullpunkt zusammenstoßen, berandet wird. — Problem B: Gesucht ist eine harmonische Funktion $u(x, y)$, die in der Nähe des Nullpunktes für $y \leq 0$ stetig ist und auf der negativen bzw. positiven x -Achse die Bedingung $\partial u / \partial y = 0$ bzw. $\partial u / \partial y = u$ erfüllt. — Es werde mit $F(z)$ bei A die gesuchte Abbildungsfunktion, bei B diejenige analytische Funktion, deren Realteil die gesuchte Lösung ist, bezeichnet. Verf. entwickelt für $F(z)$ einige Sätze, die sich (bei beiden Problemen) auf die Entwicklung in Doppelreihen nach Potenzen von z

und $z \cdot \log z$, ferner (für Problem B) auf die Entwicklung nach iterierten Integralen einer speziellen Lösung beziehen. (Kurzer Vortragsbericht ohne Beweise.)

K. Maruhn.

Komatu, Yûsaku und Akira Mori: Conformal rigidity of Riemann surfaces. J. math. Soc. Japan 4, 302—309 (1952).

Es wird eine weitgehende Verallgemeinerung eines Satzes von Radó bewiesen, der die Unmöglichkeit der konformen Abbildung eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes G auf ein echtes Teilgebiet behauptet, wenn dessen Randkomponenten zu denen von G je homotop sind [Acta Sci. Univ. Hungar., Sect. Sci. math. 2, 47—60 (1926)]: Es sei die Abbildung einer Riemannschen Fläche G , die teilweise von einer endlichen Anzahl von Jordankurven C berandet wird, auf ein echtes Teilgebiet möglich, dessen Rand C' zu C in einer Beziehung steht, die die im Spezialfall genannte in naheliegender Weise verallgemeinert; dann ist G entweder einfach zusammenhängend oder konformäquivalent einem einmal punktierten einfach zusammenhängenden Gebiet, oder G ist von unendlichem Geschlecht und hat genau eine ideale Randkomponente, und diese ist vom harmonischen Maße 0, und es existiert eine Ausschöpfung $\{G_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), so daß $C \cap \bar{G}_0$ und daß $G_k - G_{k-1}$ zu $G_{k+1} - G_k$ ($k = 1, 2, \dots$) konformäquivalent ist. — Ferner wird bewiesen: Eine Riemannsche Fläche von endlichem positiven Geschlecht läßt keine konforme Abbildung auf ein echtes Teilgebiet zu. — Beim Beweis beider Sätze ist ein Auswahlssatz betr. Folgen von eindeutigen analytischen Abbildungen einer Riemannschen Fläche in eine andere wesentlich.

H. Grunsky.

Stoilow, S.: Note sur les fonctions analytiques multiformes. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 69—74 (1952).

For an analytic function, it depends exclusively on the structure of its Riemann covering surface whether the function has the property of Iversen (for brevity, the property (I)) or not. Starting from a Riemann covering surface given a priori, the author defines and studies the property (I) for a covering surface of a basic Riemann surface, by applying his previous method (this Zbl. 15, 360; 17, 378). Further, considering an arbitrary covering surface R of the Riemann sphere S , the author investigates domains of S on which R or a part of R has the property (I). He shows by an interesting example that there exists a covering surface R without a domain of S on which R has the property (I).

K. Noshiro.

Wittich, Hans: Bemerkung zum Typenproblem. Commentarii math. Helvet. 26, 180—183 (1952).

L. Sario hat bemerkt (dies. Zbl. 35, 50), daß eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche vom parabolischen Typus so ausgeschöpft werden kann, daß die entsprechende Modulsumme konvergiert. Verf. zeigt, daß bei Flächen F , die nur über endlich vielen Grundpunkten verzweigt sind, und bei generationenweiser Ausschöpfung dieser Fall dann und nur dann eintreten kann, wenn $\sum_1^\infty 1/\sigma(n)$ konvergiert.

$[\sigma(n)$ hat die vom Wittich-Nevanlinnaschen Kriterium für den parabolischen Typus her bekannte Bedeutung.]

A. Pfluger.

Hersch, Joseph et Albert Pfluger: Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 43—45 (1952).

Eine D -pseudoanalytische Funktion ist eine innere Abbildung eines ebenen Gebietes G im Sinne des Ref., die so beschaffen ist, daß in der Umgebung eines jeden Punktes von G der „Modul“ M jedes Viereckes und der M' seines Bildes der Ungleichung $D^{-1}M \leq M' \leq DM$ genügen. Dabei heißt Modul eines topologischen Viereckes das Verhältnis der Kanten des durch konforme Abbildung erhaltenen Rechteckes. Die Abbildung wird nicht differenzierbar vorausgesetzt, was eine bedeutende Verallgemeinerung der gewöhnlichen quasi-konformen Abbildung darstellt. Es werden für die oben genannten Abbildungen interessante Sätze angegeben, die als Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas, des Satzes von Blaschke und des Nevanlinnaschen Prinzips des harmonischen Maßes zu betrachten sind.

S. Stoilow.

Toscano, Letterio: Intorno alla corrispondenza tra due piani e alle condizioni di monogeneità. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 268 (1952).

Hinweis darauf, daß das Ergebnis von G. Gotusso (dies. Zbl. 47, 323) sich bereits bei G. Calugaréano, Sur les fonctions polygènes d'une variable complexe, Thèse, Paris 1928, findet.

Robert Schmidt.

Mira Fernandes, A. De: *Funzioni pseudo-monogenee*. Univ. Lisboa, Revista Fac. Sci., II. Ser. A 2, 77—88 (1952).

Eine komplexe Funktion $f(z, z')$ der beiden komplexen Variablen $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ wird pseudo-monogen genannt, falls $(\partial/\partial x' - i \partial/\partial y') \cdot (\partial/\partial x + i \partial/\partial y) f = 0$ ist. Es wird eine Reihe von elementaren Eigenschaften derartiger Funktionen bewiesen. *A. Kriszten.*

Haefeli, Hans Georg: *I funzionali lineari delle funzioni analitiche di una variabile quaternionale*. Rend. Accad. naz. XL, Ser. IV 2, 65—110 (1952).

Die Theorie der Funktione von komplexen Funktionen mehrerer komplexer Variabler hat naturgemäß mit den Schwierigkeiten zu kämpfen, die sich aus den Anomalien dieser Klasse von Funktionen ergeben. So existiert für die linearen Funktione i. a. keine Indikatrix. Diese Anomalien verschwinden beim Übergang zu den analytischen Quaternionenfunktionen, in denen die obige Funktionenklasse als Spezialfall enthalten ist. Das Hauptresultat des Verf. ist der Existenzbeweis für die Indikatrix im Falle der linearen Quaternionenfunktionen. Durch Spezialisierung auf die Funktionen von mehreren komplexen Variablen ergibt sich dann ebenfalls die Existenz einer — hyperkomplexen — Indikatrix für gewisse Klassen von linearen Funktionalen dieser Funktionen. — Der Existenzbeweis ist im wesentlichen geleistet, wenn die Stetigkeit der betrachteten Funktione F bewiesen ist, denn dann ergibt sich aus dem 2. Integralsatz für analytische Quaternionenfunktionen

$$F[w(x)] = \frac{1}{2\pi^2} \int w(\xi) dZ F\left[\frac{\xi - \bar{x}}{n(\xi - x)}\right]$$

wo $v(\xi) = F[(\xi - x)/n(\xi - \bar{x})]$ die Indikatrix von F ist. *A. Kriszten.*

Bergman, S. and M. Schiffer: *Potential-theoretic methods in the theory of functions of two complex variables*. Compositio math. 10, 213—240 (1952).

In Fortsetzung früherer Arbeiten werden analytische Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen in speziellen, von Teilen endlich vieler analytischer Hyperebenen berandeten Gebieten G untersucht, wobei jedem Element des Raumes dieser beiden Veränderlichen unter potentialtheoretischen Gesichtspunkten Größen zugeordnet werden, die qualitative geometrische Aussagen gestatten (dies. Zbl. 34, 53). Die vorliegende Arbeit befaßt sich hauptsächlich mit der Herleitung von Ungleichungen zwischen den genannten Größen. Um zu vorgegebenen Funktionswerten auf der Bestimmungsfläche stets eine Lösung des Randwertproblems in G angeben zu können, wird die Klasse der in G B -harmonischen Funktionen geeignet erweitert. Die in einer früheren Arbeit über die Greenschen und Neumannschen Funktionen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (dies. Zbl. 32, 352) angegebenen Beziehungen zwischen der Kernfunktion und der Greenschen Funktion werden auf den Fall zweier komplexer Veränderlicher ausgedehnt.

E. Kreyszig.

Cartan, Henri: *Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 152—164 (1952).

Principaux résultats obtenus dans les 20 dernières années sur domaines d'holomorphic, idéaux de fonctions holomorphes, prolongement analytique des sous-variétés, relations avec la théorie des espaces fibrés. *M. Hervé.*

Bochner, S. and W. T. Martin: *Hartogs' theorem in complex spaces with singularities*. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 137—146 (1952).

Hartogs [Math. Ann. 62, 1—88 (1906)] hat die folgenden beiden Sätze bewiesen: Satz A: Ist $\Phi(P, Q)$ irgendeine Funktion im Produkt $M \times N$ zweier komplexer Mannigfaltigkeiten M und N , derart, daß für jedes $P_0 \in M$ die Funktion $\Phi(P_0, Q)$ holomorph in $Q \in N$ ist und für jedes $Q_0 \in N$ die Funktion $\Phi(P, Q_0)$ holomorph in $P \in M$ ist, so ist $\Phi(P, Q)$ holomorph in $M \times N$. Satz B: Seien D und \tilde{D} offene Mengen im Produkt $M \times N$ zweier komplexer Mannig-

faltigkeiten M, N . Für jeden Punkt $P \in M$ seien D_P bzw. \tilde{D}_P die in N liegenden offenen Mengen $D \cap (P \times N)$ bzw. $\tilde{D} \setminus (P \times N)$; jede zusammenhängende Komponente von \tilde{D}_P enthalte mindestens eine nichtleere zusammenhängende Komponente von D_P . Ist dann $\Phi(P, Q)$ eine in D holomorphe Funktion und ist $\Phi(P_0, Q)$ für jedes $P_0 \in M$ holomorph in $Q \in \tilde{D}_{P_0}$, so ist $\Phi(P, Q)$ holomorph in \tilde{D} . Die Verff. verallgemeinern diese beiden Sätze dahingehend, daß sie an die Stelle der komplexen Mannigfaltigkeiten M und N „komplexe Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten“ [vgl. Bochner und Martin, Ann. of Math., II. Ser. 57, 490—516 (1953)] setzen. Dann haben sie — entsprechend ihren Definitionen — zwischen holomorphen und streng holomorphen Funktionen zu unterscheiden. Als Resultat ergibt sich, daß die Sätze A und B sowohl für holomorphe als auch für streng holomorphe Funktionen in beliebigen „komplexen Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten“ gelten.

R. Remmert.

Bochner, S. and W. T. Martin: Local transformations with fixed points on complex spaces with singularities. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 726—732 (1952).

Anknüpfend an die Definitionen und Ergebnisse ihrer Arbeit „Complex spaces with singularities“ (vgl. vorsteh. Referat und die dort zitierte Arbeit) führen die Verff. den Begriff der „stetigen, holomorphen Abbildung“ eines Raumes U in sich ein. Der Raum U ist dabei im wesentlichen eine endlich-blättrige Überlagerung einer Hyperkugel S des Zahlenraumes C^n , die über einer gewissen $(n-1)$ -dimensionalen analytischen Menge E S verzweigt ist. Es wird zunächst gezeigt, daß die zusammengesetzte Abbildung $T' \cdot T$ zweier stetiger holomorpher Abbildungen T' und T von U in sich wieder eine stetige holomorphe Abbildung von U in sich ist, wenn die Menge $T(U)$ nicht aus lauter Punkten besteht, die über E liegen. Weiter werden kompakte Gruppen Γ von stetigen, holomorphen Transformationen des Raumes U in sich untersucht. Bezeichnet $p: \{U \rightarrow S\}$ die Projektion von U in S , so wird gezeigt: Gibt es einen Punkt $Q \in U$, derart, daß für jede Transformation T aus einer kompakten Gruppe stetiger holomorpher Transformationen Γ von U in sich die Abbildung $p \cdot T$ von U in S in der Nähe des Punktes Q sich nur wenig von der Abbildung p unterscheidet, so gibt es eine stetige holomorphe Abbildung R von U in S , die sich in der Nähe von Q nur wenig von p unterscheidet, derart, daß gilt: $RT = R$ für jedes $T \in \Gamma$. Der Beweis macht Gebrauch von der Existenz eines Haarschen Maßes auf kompakten Gruppen.

R. Remmert.

Aikawa, Sanzō: On extension of Schwarz's theorem. Kōdai math. Sem. Reports Nr. 4, 104—106 (1952).

Das Schwarzsche Lemma wird wie folgt auf Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen übertragen: Die Funktionen $f_i(z_1, \dots, z_n) = f_i(z)$ ($i = 1, \dots, n$) seien in der Hyperkugel $|z| \equiv (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2} \leq 1$ holomorph. Es sei $f_i(t \cdot z) \equiv f_i(t z_1, \dots, t z_n) = t^m \cdot F_i(t, z)$ (m eine ganze Zahl ≥ 1) mit in $\{|t| \leq \varepsilon, |z| \leq 1\}$ holomorphen $F_i(t, z)$. Dann gilt in $|z| \leq 1$ für jedes ganzzahlige $p > 1$

$$|f(z)|_p \leq |z|^m \cdot \max_{|w| \leq 1} |f(w)|_p, \quad \text{wo} \quad |f(z)|_p = \left(\sum_{i=1}^n |f_i(z)|^p \right)^{1/p}$$

gesetzt ist. Der Beweis benutzt den im Lehrbuch von S. Bochner-W. T. Martin (Several complex variables, Princeton 1948, pp. 59—64, dies. Zbl. 41, 52) behandelten Fall $m = 1$. Abschließend gibt Verf. zwei Anwendungsbeispiele.

K. Stein.

Tornehave, H.: On analytic functions of several variables. Analytic continuation by Schwarz's reflexion method. Mat. Tidsskr. B 1952, 29—37 (1952).

Sei G_1 ein Gebiet im Raume R^{2n} der komplexen Veränderlichen $(z_1, \dots, z_n) = z = x + i y$, zu dessen Rand ein im Teilraum $y = 0$ gelegenes n -dimensionales Gebiet g gehört; es werde vorausgesetzt, daß mit jedem $x^{(0)} \in g$ ein bestimmtes Stück eines dem Teilraum $x = x^{(0)}$ angehörenden n -dimensionalen Winkelraumes mit $(x, y) = (x^{(0)}, 0)$ als Spitze in G_1 enthalten ist. Das durch Spiegelung an $y = 0$ aus G_1 hervorgehende Gebiet sei mit G_2 bezeichnet. Sei ferner $f(z)$ eine in G_1 holomorphe und auf g noch stetige Funktion, die auf g reelle Werte annimmt. Verf. zeigt: Wird $F(z) = f(z)$ gesetzt, falls $z \in G_1 \cap g$, und $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$, falls $z \in G_2$, so ist $F(z)$ eine in $B = G_1 \cup g \cup G_2$ holomorphe Funktion. Da B nicht notwendig ein Gebiet ist — G_1 und G_2 grenzen i. a. nur längs g aneinander — besteht der wesentliche Schritt des Beweises darin, $f(z)$ in eine volle Umgebung der Kante g holomorph fortzusetzen. Dies gelingt nach einer geeigneten analytischen Transformation mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel. — In Verbindung mit einem bekannten Satze über die Holomorphiehüllen von Tuben folgt: Sei Ω das Gebiet $\{y_v > 0, v = 1, \dots, n\}$, ω der Teilraum $y = 0$ des R^{2n} . Ist $f(z)$ holomorph in Ω , stetig in $\Omega \cup \omega$ und reellwertig auf ω , so ist $f(z)$ in den gesamten Raum R^{2n} holomorph fortsetzbar.

K. Stein.

Tornehave, H.: On analytic functions of several variables. Some results concerning analytic completion. Mat. Tidsskr. B 1952, 44—60 (1952).

Im Raum R^{2n} der komplexen Veränderlichen $(z_1, \dots, z_n) = z = x + i y$ sei E_p^{n+1} der $(n+1)$ -dimensionale Teilraum $y_1 = \dots = y_{p-1} = y_{p+1} = \dots = y_n = 0$, ferner $G^{2n} = g_1 \times \dots \times g_n$ ein Zylindergebiet, dessen Projektionen g_ν einfach-zusammenhängende, in bezug auf die reelle Achse symmetrische Gebiete in den Ebenen der Veränderlichen z_ν sind. Verf. zeigt, daß die Holomorphiehülle $H(M^{n+1})$ der $(n+1)$ -dimensionalen Punktmenge $M^{n+1} = G^{2n} \cap (E_1^{n+1} \cup \dots \cup E_n^{n+1})$ wieder folgt erhalten werden kann: Man bilde jedes g_ν konform so auf die rechte Halbebene ab, daß das in g_ν enthaltene Stück der reellen Achse in die positive reelle Achse übergeht; die Abbildungsfunktionen seien mit $\varphi_\nu(z_\nu)$ bezeichnet. Es sei B^{2n} das durch $|\arg \varphi_1(z_1)| + \dots + |\arg \varphi_n(z_n)| < \pi/2$ gegebene analytische Polyeder. Dann ist $H(M^{n+1}) = G^{2n} \cap B^{2n}$. Im Beweise wird die bekannte Konstruktion der Holomorphiehüllen Reinhardt'scher Körper wesentlich benutzt. Abschließend werden Beispiele behandelt und frühere Resultate des Verf. über das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip im R^{2n} erweitert (vgl. vorstehendes Ref.). K. Stein.

Motzkín, T. S. and I. J. Schoenberg: On lineal entire functions of n complex variables. Proc. Amer. math. Soc. 3, 517—526 (1952).

Ein Polynom $P(z_1, \dots, z_n)$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten heißt „lineal“ (bzw. reell-lineal, bzw. positiv reell-lineal), wenn es in Linearfaktoren mit komplexen (bzw. reellen, bzw. nichtnegativen reellen) Koeffizienten zerlegbar ist. Eine ganze Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$ heißt lineal (reell-lineal, positiv reell-lineal), wenn sie in jedem kompakten Teil des Raumes der komplexen Veränderlichen z_1, \dots, z_n gleichmäßig durch lineale (reell-lineale, positiv reell-lineale) Polynome approximiert werden kann. Lineale Funktionen können als Nullstellenflächen höchstens analytische Ebenen besitzen, und diese Eigenschaft ist charakteristisch. Verff. zeigen ferner, daß eine lineale Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$ genau dann reell-lineal bzw. positiv reell-lineal ist, wenn sie gewisse besondere Weierstraß'sche Produktentwicklungen zuläßt. Für $n=1$ ist diese Aussage mit älteren Ergebnissen von Laguerre und Pólya äquivalent. K. Stein.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Tsuiji, Masatsugu: Myrberg's approximation theorem on Fuchsian groups. J. math. Soc. Japan 4, 310—312 (1952).

Folgender Satz von Myrberg (dies. Zbl. 1, 2) wird mit Hilfe des Ergodensatzes von Hopf (Ergodentheorie, Berlin 1937, S. 72; dies. Zbl. 17, 283) kurz gezeigt: Sei G eine Fuchs'sche Gruppe, die $|z| < 1$ invariant läßt und einen Fundamentalbereich mit endlichem nichteuklidischen Maße hat, sei $L(\theta)$ der Durchmesser von $|z| \leq 1$ durch den Randpunkt $e^{i\theta}$, und seien L_k seine Bilder bei den Abbildungen aus G . C sei irgendein auf $|z| = 1$ senkrechter Kreis. Dann gibt es eine Teilmenge E vom Maß 2π auf $|z| = 1$, so daß für alle $e^{i\theta} \in E$ eine Teilfolge der L_k gegen C konvergiert. G. Lochs.

Hervé, Michel: Sur les fonctions fuchsienues de deux variables complexes. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 69, 277—302 (1952).

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung und Begründung seiner Ergebnisse, über die er zum Teil bereits früher berichtet hatte (dies. Zbl. 30, 387; 42, 90; 46, 312). Zugrunde gelegt wird ein beschränktes Gebiet \mathcal{G} in einem komplexen C^2 mit einer diskontinuierlichen Gruppe γ aus Automorphismen von \mathcal{G} . Vorausgesetzt wird, daß ein volles Vertretersystem von Punkten aus \mathcal{G} nach γ in einem ganz im Innern von \mathcal{G} enthaltenen Kompaktum liegt. Eine in \mathcal{G} holomorphe Funktion Θ wird als funktion fuchsienne („f. f.“) bezeichnet, wenn für eine ganze Zahl m , die Dimension der „f. f.“, $(1) \Theta(f(z)) = \Theta(z) [Df(z)]^{-m}$ für alle f aus γ und alle z aus \mathcal{G} ist, wobei $Df(z)$ die Funktionaldeterminante von $f(z)$ bezeichnet. Verf. erhält folgende Hauptergebnisse: (a) Jede in \mathcal{G} meromorphe Funktion, die invariant gegenüber den Transformationen aus γ ist, läßt sich als Quotient zweier „f. f.“ darstellen. (b) Für hinreichend großes m ist jede „f. f.“ als

Poincarésche Reihe darstellbar. (c) Der Rang der Schar der „f. f.“ der Dimension m ist $d(m) = a m^2 + b(r) m + c(r)$, falls m hinreichend groß ist. a ist eine Gruppenkonstante, r ist der reduzierte Rest von m mod dem k. g. V. der Ordnungen der „elliptischen Substitutionen“ aus γ . — Das wesentliche Hilfsmittel ist die Einführung des Begriffes der function ε -fuchsienne („f. ε -f.“). Ist ε eine analytische Mannigfaltigkeit in \mathfrak{G} , die durch alle Transformationen aus γ in sich übergeführt wird, so heißt eine in \mathfrak{G} holomorphe Funktion Θ „f. ε -f.“ der Dimension m , wenn (1) auf ε erfüllt ist. Zwei „f. ε -f.“ betrachtet man als äquivalent, wenn sie auf ε übereinstimmen. Der Rang der Schar der so entstehenden Klassen von Funktionen läßt sich leicht als $\delta_\varepsilon(m) = O(m)$ abschätzen. Durch Konstruktion passender Poincaréscher Reihen erhält man $d(m)/m^2 > 1/2 k^2 > 0$ für große m und durch Vergleich mit $\delta_\varepsilon(m)$ die Existenz einer „f. f.“, die auf ε verschwindet, was dann unmittelbar (a) liefert. Um (b) und (c) zu erhalten, muß man für ε die Nullstellenmannigfaltigkeit einer zu diesem Zweck konstruierten „f. f.“ $\alpha(z)$ benutzen, die insbesondere nur einfache Nullstellen haben darf. Man konstruiert weiter mit Poincaréschen Reihen zwei „f. f.“ $\beta_1(z)$ und $\beta_2(z)$ so, daß $\beta_1(z) = 0$, $\alpha(z) = 0$ nur isolierte Punkte enthält, in denen $\beta_2(z)$ nicht verschwindet. Diese Funktionen ergeben mit Hilfe der Cartanschen Idealtheorie eine Darstellung der Klassen der „f. ε -f.“ in der Form $(\Theta) = (\beta_1)(g) + (\beta_2)(h)$, worin die Klasse (h) nicht nur „f. ε -f.“, sondern auch mindestens eine „f. f.“ enthält. Mit dieser Darstellung kann man $\delta_\varepsilon(m)$ zu $(3) \delta_\varepsilon(m) = \lambda m + \varrho(r)$ bestimmen und damit dann $d(m)$ ermitteln. (b) ergibt sich ebenfalls ohne Schwierigkeiten. — Die Beschränkung auf den C^2 war vor allem darum nötig, weil wesentlich ausgenutzt wurde, daß jeder Punkt von $\alpha(z) = 0$ uniformisierbar ist.

K.-B. Gundlach.

Bohr, Harald: A survey of the different proofs of the main theorems in the theory of almost periodic functions. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 339—348 (1952).

Expository paper.

E. Følner.

Kopeć, J.: On vector-valued almost periodic functions. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 100—105 (1952).

Die Sätze über fastperiodische Funktionen mit Werten in einem Banachraum werden aus den entsprechenden Sätzen über (nach Bohr) eigentlich-fastperiodische Funktionen hergeleitet.

W. Maak.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Viktorovskij, E. E.: Über einen allgemeinen Existenzsatz für die Lösungen von Differentialgleichungen, der mit der Untersuchung von Integralungleichungen zusammenhängt. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 27—33 (1952) [Russisch].

Im Anschluß an den Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit stetiger rechter Seite von Perron [Math. Ann. 76, 471—484 (1915)] und ganz nach seinem Muster wird ein Existenzbeweis für die Lösungen derselben Gleichung unter allgemeineren Voraussetzungen über die Funktion $f(x, y)$ geführt. Diese Voraussetzungen sind noch etwas allgemeiner als die von Carathéodory in seinem Buch „Vorlesungen über reelle Funktionen“ (Leipzig 1918) eingeführten: $f(x, y)$ sei stetig in y , $-\infty < y < +\infty$, bei fast allen festen $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$, meßbar in x , $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$, bei jedem festen y , und es sei $|f(x, y)| \leq M(x) \varphi(|y|)$, wo $M(x)$ eine summierbare Funktion bedeutet und $\varphi(y)$ eine für $y \geq 0$ erklärte,

stetige, positive, monoton wachsende Funktion, für die $\int_a^\infty \frac{dy}{\varphi(y)} = \infty$ gilt. Gesucht werden

durch den Punkt (x_0, y_0) gehende, absolut stetige Integrale obiger Differentialgleichung. Die zur Bestimmung eines minimalen Integrales dieser Art eingeführte Klasse $\mathfrak{M}(f; y_0)$ von durch den Punkt (x_0, y_0) gehenden, stetigen Näherungsfunktionen $u(x)$ wird nicht wie bei Perron durch die Differentialungleichung $u' < f(x, u)$ definiert, sondern durch die (in ähnlicher Weise aus-

nutzbare) Integralungleichung $u(x_2) - u(x_1) \geq \int_{x_1}^{x_2} f(x, u(x)) dx$, gültig für jedes Intervall

$[x_1, x_2] \subseteq [x_0, x_0 + \alpha]$, mit umgekehrtem Sinn des Ungleichheitszeichens und zugelassenem Gleichheitszeichen. Dadurch erscheint im Gegensatz zu Perron das Minimalintegral $u_0(x)$ nicht als obere, sondern als untere Grenzfunktion aller Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}(f; y_0)$: $u_0(x) = \inf u(x)$. Analoges gilt, mutatis mutandis, für das Maximalintegral. Durch den Nachweis, daß $u_0(x)$ absolut stetig ist und fast überall in $[x_0, x_0 + \alpha]$ der Differentialgleichung genügt, ist der Existenzbeweis geführt. Die Hilfsmittel dazu entstammen den Grundlagen der Theorie der reellen Funk-

tionen und der Lebesgueschen Integrale. Am Schluß wird noch eine Angabe gemacht über die Verallgemeinerung des Satzes auf ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit mehreren unbekannten Funktionen.
E. Svenson.

McAllister, B. L. and C. J. Thorne: Reverse differential equations and others that can be solved exactly. *Studies appl. Math.* 6, 26 p. (1952).

Es wird eine Zusammenstellung derjenigen Fälle gegeben, in denen gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichungen elementar integrierbar sind, auf elementar integrierbare zurückgeführt oder in ihrer Ordnung reduziert werden können. Besonders ausführlich werden diejenigen Differentialgleichungen behandelt, die durch Vertauschung der Rollen der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen vereinfacht werden können. Nützlich hierbei ist eine Tafel, in welcher die Ableitungen der Originalfunktion durch die Ableitungen der Umkehrfunktion ausgedrückt werden. Ein großer Teil von nichtlinearen Differentialgleichungen, bei denen die Rolle der Veränderlichen vertauscht wird, kann auf eine Abelsche Differentialgleichung reduziert werden.
W. Quade.

Campbell, J. G.: A criterion for the polynomial solutions of a certain Riccati equation. *Amer. math. Monthly* 58, 388—389 (1952).

Rainville (this Zbl. 26, 402) showed that the factorization of certain differential operators is equivalent to finding polynomial solutions of a Riccati differential equation, $A y' = B_0 + B_1 y + B_2 y^2$, where A, B_0, B_1, B_2 are polynomials, say of degrees a, b_0, b_1, b_2 respectively. The present note shows, by considering the degrees of the various terms, that, if the equation should possess a polynomial solution of degree m , then, if $a = 1 + b_1$, $b_0 - b_1 \leq m \leq b_1 - b_2$, while if $a \neq 1 + b_1$, m must be one of the five numbers $1 + b_0 - a, a - b_2 - 1, b_0 - b_1, \frac{1}{2}(b_0 - b_2), b_1 - b_2$.
W. W. Sawyer.

Plainevaux, J. E.: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 38, 1142—1148 (1952).

L'A. obtient, sans faire appel ni à la transformation intégrale, ni au calcul symbolique, la formule qui donne la solution correspondant au repos à l'instant initial d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre.
M. Hukuhara.

Barbuti, Ugo: Sulla stabilità delle soluzioni per la equazione: $x'' + B(t)x = 0$. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 12, 170—175 (1952).

The author gives sufficient conditions for the boundedness of the solutions of the linear equation (1) $x'' + [b^2 - C(t)]x = 0$, where $b \neq 0$ is a real constant, and $C(t)$, $t_0 \leq t < +\infty$, a real function supposed L^* integrable in every finite interval $[t^0, t^1]$, $t^0 < t^1 < +\infty$. Put $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t^0}^t C(\tau) \sin 2b\tau d\tau$, $\psi(t) = \psi_0 + \int_{t^0}^t C(\tau) \cos 2b\tau d\tau$, where φ_0, ψ_0 are constants. — I. If two constants φ_0, ψ_0 exist such that $\varphi(t), \psi(t)$ are bounded and L^2 -integrable in $(t^0, +\infty)$ then all solutions of (1) are bounded in $(t^0, +\infty)$. — II. If the integrals $\Phi(t) = \int_t^{+\infty} C(\tau) \sin 2b\tau d\tau$, $\Psi(t) = \int_t^{+\infty} C(\tau) \cos 2b\tau d\tau$, $t^0 \leq t < +\infty$, exist and are L^2 -integrable functions in $(t^0, +\infty)$, then all solutions of (1) are bounded in $(t^0, +\infty)$. — III. If $C(t) = f(t)\omega(t)$, where $f(t)$ is monotone in $(t_0, +\infty)$, and a constant $M > 0$ exists such that $\left| \int_{t_1}^{t_2} \omega(\tau) \sin 2b\tau d\tau \right| < M$, $\left| \int_{t_1}^{t_2} \omega(\tau) \cos 2b\tau d\tau \right| < M$ for all $t^0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$, then all solutions of (1) are bounded in $(t^0, +\infty)$.
L. Cesari.

Kulikov, N. K.: Zur Bestimmung des Grenzwertes der allgemeinen Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung. Priklad. Mat. Mech. 16, 729—734 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht die Stabilität der Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung $\dot{x} + F(x) = M \sin pt$, M und p const., in welcher $F(x)$ eine stetige positive Ableitung besitzt. Dabei macht er die Annahme, daß die Differentialgleichung eine periodische Lösung mit der Periode τ ($0 \leq \tau \leq 2\pi/p$) besitzt und eine Beziehung $\Phi(x_\infty, \tau) = 0$ besteht, die er als „Grenzwert“ der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung bezeichnet. Es wird ein Satz mitgeteilt, mit dessen Hilfe es möglich ist, die Funktion Φ durch M , p , $F(x)$ und τ darzustellen. Der Satz wird an Beispielen erläutert, und es werden die Eigenschaften der allgemeinen Lösung diskutiert.

W. Quade.

Blaquière, A.: Les oscillateurs non linéaires et le diagramme de Nyquist. J. Phys. Radium 13, 527—540 (1952).

Blaquière, A.: Adaptation générale de la méthode du diagramme de Nyquist dans le domaine non linéaire. J. Phys. Radium 13, 636—644 (1952).

Diese beiden Arbeiten enthalten manche Anregungen, lassen aber auch viele Fragen offen. Verf. behandelt einige Beispiele nichtlinearer Schwingungsdifferentialgleichungen (1) $H_0\{x(t)\} = 0$, welche die Form (2) $H_0\{x(t)\} = L'\{x\} + L''\{x^3\} = 0$ mit linearen Operatoren L' , L'' haben. [Anm. d. Ref.: Das Verfahren läßt sich auf Gleichungen der Gestalt (2') $P_0(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) \equiv H_0\{x(t)\} = 0$ übertragen, wobei die Funktion P_0 in x ganz-rational und in den Ableitungen $\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}$ linear sei, während sie von t nicht explizit abhängt.] Die vom Verf. behauptete Möglichkeit der Übertragung auf allgemeinere nichtlineare Gleichungen wird nicht erläutert. Es wird vorausgesetzt, daß (1) eine sinusähnliche Lösung der Form (3) $x(t) = a(t) \sin \psi(t)$ mit $\psi(t)/t = \omega(t)$; $a(t) \geq 0$ zulasse, wobei die Amplitude $a(t)$ und die Frequenz $\omega(t)$ nur langsam veränderlich sein sollen. $a(t)$ läßt sich dann (nicht eindeutig! Ref.) als Einhüllende der Schwingung $x(t)$ bestimmen. [Anm. d. Ref.: Vorzuziehen wäre wohl (3') $x(t) = a(t) \sin \psi(t)$ mit $\omega(t) = d\psi/dt$; (3) wird gewöhnlich nur für kürzere Zeitabschnitte bei passender Verschiebung des t -Nullpunktes zutreffen.] Diese Voraussetzung bedeutet, daß (1) nur „schwach nichtlinear“ ist. — (1) wird nun durch eine andere Gleichung ersetzt, die man als „säkular-nichtlinear“ bezeichnen könnte, weil sich in dieser Form (4) $H(a)\{x(t)\} = 0$ die Nichtlinearität nur durch das Auftreten der Amplitude in den Beiwerten des im übrigen bezüglich $x(t)$ linearen Operators $H(a)$ bemerkbar macht. Dabei gibt Verf. keine allgemeine Vorschrift, wie weit man in $H(a)$ die Veränderlichkeit von $a(t)$ berücksichtigen soll. Er setzt vielfach $H(a)$ in (4) als gegeben voraus und läßt hier auch gebrochen-rationale Operatoren (bezüglich d/dt) zu. Der entscheidende Gedanke dieser beiden Arbeiten — von denen die zweite, entgegen ihrem Titel, nicht wesentlich allgemeiner ist als die erste — besteht nun darin, daß Verf. irgendeinen Wert der Funktion $a = a(t)$ festhält, um dann (4) insbesondere auf (5) $x(t) = a \sin \omega t$ (mit festen a, ω) anzuwenden. So bekommt er eine Schar linearer Operatoren (6) $L_1(a) = H(a) \cdot a$, die nur noch auf die Funktionen $\sin \omega t$ wirken sollen. Damit werden aber alle Methoden der komplexen Schwingungsforschung benutzbar. [Zus. d. Ref.: Physikalisch mag es, besonders in der Elektronik, wohl Schwingungssysteme geben, die sich ziemlich unmittelbar durch eine Gleichung der Gestalt (4) beschreiben lassen. Mathematisch jedoch bleibt hier die Voraussetzung unklar: Verf. zeigt zwar am Falle (2), wie sich einem nichtlinearen Operator H_0 ein säkularer Operator $H(a)$ zuordnen läßt, gibt aber nicht an, wie $H(a)$ allgemein zu bestimmen sei. Sein Verfahren läßt sich für die unter (2') zusammengefaßten Fälle in der Weise verallgemeinern, daß man H_0 auf (5) anwendet und die Grundschwingung der zugehörigen Fourier-Entwicklung (7) $H_0\{a \sin \omega t\} = \sum P_n(a, \omega) \sin n\omega t$ ($n = 1, 2, \dots$) durch einen linearen Operator darstellt (was eindeutig möglich ist): (8) $P_1(a, \omega) \sin \omega t = L_1(a)\{a \sin \omega t\}$. Darauf kann man noch $H(a) = a^{-1} L_1(a)$ setzen. Die Voraussetzung, daß in (2') P_0 bezüglich der Ableitungen linear sein solle, kann gemildert werden; sie soll nur verhindern, daß L_1 von höherer Ordnung werden kann als H_0 . Ist H_0 nur schwach nichtlinear, so kann man jetzt in (7) die Oberschwingungen vernachlässigen und (1) durch (4) ersetzen.] Nachdem die Schar (6) der „berührenden linearen Operatoren“ $L_1(a)$ gewonnen ist, ergeben die Nullstellen (9) $\omega(a) = \omega_1(a) + i\omega_2(a)$ der Gleichung (10) $e^{-i\omega t} L_1(a)\{e^{i\omega t}\} = L(a, \omega) = 0$ eine „berührende sinusartige Schwingung“ (11) $y(t) = a \exp i\omega t = a \exp(-\omega_2 t) \exp i\omega_1 t$. Verf. setzt voraus, daß das System (1) schwingungsfähig sei, daß es also eine sich anfachende Schwingung (3) gebe, deren Amplitude $a(t)$, von 0 anfangend, einem stabilen Grenzwert a_s zustrebt. Es wird demgemäß für $0 \leq a < a_s$ stets eine Wurzel (9) mit $\omega_2 < 0$ geben. Die Dauerschwingung $x(t) = a_s \sin \omega_s t$ wird durch $\omega_2 = 0$ gekennzeichnet sein: (12) $L(a_s, \omega_s) = 0$ mit reeller Frequenz $\omega_s = \omega_1(a_s)$. — Die Funktionswerte (13) $z = L(a, \omega) \equiv U(a, \omega) + i V(a, \omega)$ ergeben für reelle Werte von a und ω zwei Kurven-

scharen in der komplexen Ebene: $a = \text{const}$, $\omega = \text{const}$. Von diesen können die Amplitudenkurven ($a = \text{const}$) nach Nyquist dazu dienen, durch ihren Umlaufssinn um den Nullpunkt die Existenz einer sich anfachenden Schwingung (1) anzuzeigen, was Verf. aber nur nebenbei erwähnt. Er weist darauf hin, daß nach (12) nur die Amplitudenkurve $a = a_s$ durch $z = 0$ geht und daß zwar alle Frequenzkurven ($\omega = \text{const}$) wegen des Faktors a in $L_1(6)$ aus dem Nullpunkt entspringen, daß dann aber nur die Kurve $\omega = \omega_s$ für endliches $a = a_s$ nochmals durch den Nullpunkt geht. Die benachbarten Frequenzkurven werden sich ebenfalls zurückwenden, um nahe am Nullpunkt vorbeizugehen. Anwendungsmöglichkeiten: I. Die genannten Eigenschaften des Netzes der Amplituden- und Frequenzkurven geben unmittelbar ein Verfahren zum Aufsuchen der stabilen Schwingung (a_s, ω_s). II. Die Schnittpunkte der Amplitudenkurven $a = a_1$ mit den nach (9) zugeordneten Frequenzkurven $\omega = \omega_1(a_1)$ liefern eine Übergangskurve, längs welcher sich der Einschwingungsvorgang vollzieht. Diese Kurve geht von $z = 0$ aus, wendet sich und läuft dann beim Erreichen der Dauerschwingung wieder in den Nullpunkt hinein. Der Winkel, unter dem sie die beiden Kurvenscharen dabei schneidet, und deren Dichten bestimmen den Zusammenhang der Änderungen von a und ω bei Störungen der stabilen Schwingung. Nur wenn die Übergangskurve im Nullpunkt die Grenzfrequenzkurve berührt (zur Grenzamplitudenkurve steht sie dort normal), ist die Grenzfrequenz störungsunempfindlich (wichtig für die Brauchbarkeit des Schwingers zur Zeitmessung!). Formeln ergeben sich nach (13) aus den Ableitungen von U und V im Grenzpunkt. III. Aus der Diff.-Gl. $da/dt = -a\omega_2(a_1)$, welche für die Amplitude der in $a(t) = a_1$ berührenden Schwingung (11) gilt, bildet Verf. die Gleichung (14) $da/dt + a\omega_2(a) = 0$ und gewinnt durch Integration ein Gesetz $a = a(t)$, worin er das des Einschwingvorganges (3) erkennt. IV. Recht einfach läßt sich auch das Problem der Synchronisation, d. h. der Erzeugung erzeugener Schwingungen vorbestimmter Frequenz, behandeln, wiederum mit der für das ganze Verfahren typischen Beschränkung auf die Grundschiwingung. Wird in (4) die rechte Seite durch $E \sin(\omega^* t + \varphi)$ oder in komplexer Schreibweise durch $E \exp i(\omega^* t + \varphi)$ ersetzt, so ergibt sich mit dem Ansatz $x(t) = a^* \exp i\omega^* t$ nach (6) die Gleichung $L_1(a^*) \{ \exp i\omega^* t \} = E \exp i(\omega^* t + \varphi)$, die sich mit (10) zu (15) $L(a^*, \omega^*) = E e^{i\varphi}$ vereinfacht. Man hat also auf der Frequenzkurve $\omega = \omega^*$ den Schnittpunkt M mit dem Betragskreis $|z| = E$ zu suchen und den Parameter $a = a^*$ der durch M gehenden Amplitudenkurve festzustellen. Das Argument von M ist gleich der Phasenverschiebung φ (die vom Verf. angegebene Regel stimmt nicht ganz). So läßt sich die Funktion $a^*(E)$ ermitteln. V. Bei dieser Konstruktion erkennt man leicht, daß es zu jedem ω im allgemeinen ein Intervall für die Amplitude E der erregenden Schwingung gibt, wo sich drei Schnittpunkte M finden, während für noch kleinere oder noch größere E nur ein Schnittpunkt entsteht. Es kommt jedoch noch auf die Stabilität der gefundenen Schwingungen an, insbesondere kann bei sehr schwacher Erregung E eine stabile Schwingung unmöglich sein. Die Grenzen des Bereiches (E, ω), in dem Synchronisation des Schwingers möglich ist, werden durch die Berührungspunkte der E -Kreise mit den ω -Kurven bestimmt. Zur Prüfung der Stabilität der erzeugten Schwingung wird ein Rechenverfahren angegeben. [Ref. bezweifelt, daß hierbei der säkulare Operator $H(a)$ die Veränderlichkeit von $a(t)$ ausreichend erfaßt, es sei denn in Nähe der Grenzschiwingung (a_s, ω_s). Das gleiche Bedenken ist vielleicht auch bezüglich der Ermittlung der Amplitudenfunktion $a(t)$ aus (14) am Platze.]

U. T. Bödewadt.

Otsuki, Tominosuke: On a boundary value problem of systems of paths in plane. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 284—293 (1952).

The author considers differential equations of the second order of the type

$$(*) \quad y'' = A(x, y) y'^3 - B(x, y) y'^2 + C(x, y) y' - D(x, y),$$

where A, B, C, D are bounded continuous functions in the (x, y) plane and proposes the following problem: When we take arbitrary two points in the (x, y) plane, is there any integral curve (path) which passes through these two points? The referee treated the special case where A, B, C, D are all constants (this Zbl. 37, 343) and got the following results: Differential equations of such kind can be classified into two types. For one of them any two points can be bound always by a path, and for the other one any point can be bound by a path with those and only those points which lie between certain parallel lines at equal distance from the first point. The author calls these as type (α) and (β) and he first gives another proof of it getting moreover two invariants Φ and Ψ such that they are homogeneous polynomials of A, B, C, D and $\Phi \neq 0$ and $\Psi > 0$ are the necessary and sufficient conditions in order that (1) is of type (β) . In the second place, he considers the general case getting the following results: Suppose that for two given points $(a_0, b_0), (a_1, b_1)$ ($a_0 < a_1$) there exists a path binding them in the system of paths which are given by the differential equation $y'' = A(a_0, b_0) y'^3 - B(a_0, b_0) y'^2 + C(a_0, b_0) y' - D(a_0, b_0)$. Then, if the differential equations $dz/dx = f_1(z)$, $dz/dx = F_1(z)$ where $f_1(z)$ and $F_1(z)$ are continuous functions of z such that $f_1(z) < f(z) = g$. l. b. $P(x, y, z)$, $F_1(z) > F(z) = l$. u. b. $P(x, y, z)$, $P(x, y, z) = A(x, y) z^3 - B(x, y) z^2 + C(x, y) z - D(x, y)$, are soluble in $|x| \leq a_1 - a_0$ under the initial condition $z(0) = (b_1 - b_0)/(a_1 - a_0)$, there exists a path binding them in the given

system of paths. The key point of the proof is to put

$$H(x, \tau) = \frac{(a_1 - x)(\tau - a_0)}{(a_1 - a_0)} \quad \text{for } x \geq \tau, = \frac{(a_1 - \tau)(x - a_0)}{(a_1 - a_0)} \quad \text{for } x < \tau,$$

$$\bar{y}(x) = - \int_{a_0}^{a_1} H(x, \tau) P(\tau, y(\tau), z(\tau)) d\tau + \frac{(a_1 - x)b_0 + (x - a_0)b_1}{a_1 - a_0},$$

$$\bar{z}(x) = - \int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial}{\partial x} H(x, \tau) P(\tau, y(\tau), z(\tau)) d\tau + \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0}$$

and to find a fixed element in the function space B which consists of pairs of functions $(y(x), z(x))$ such that $y(x), z(x)$ are continuous functions in $a_0 \leq x \leq a_1$. S. Sasaki.

Coddington, E. A.: On the spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 732—737 (1952).

Übertragung der von K. Kodaira und anderen entwickelten Theorie der Eigenwertprobleme selbstadjungierter Differentialgleichungen $2n$ -ter Ordnung auf den Fall beliebiger, auch ungerader Ordnung unter Zulassung komplexer Koeffizienten. Da die Differentialoperatoren nicht mehr reell sind, können sie ungleiche Defektindizes besitzen, es tritt daher auch der Fall ein, daß keine selbstadjungierten Randbedingungen existieren. Es wird für den „Grenzfunktfall“, in dem das Problem ohne Randbedingungen hermitesch ist, ein Entwicklungssatz hergeleitet, der die sonst übliche Form besitzt. Wesentliches Beweiselement ist ein Satz von B. M. Levitan (dies. Zbl. 41, 57).

H. O. Cordes.

Zadiraka, K. V.: Zur Konstruktion von zweiseitigen Approximationen für die Eigenwerte des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems. Priklad. Mat. Mech. 16, 735—738 (1952) [Russisch].

In $y'' + Q(x, \lambda)y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, $0 \leq x \leq l$, sei $\mu = \mu(\lambda)$ das Maximum von $Q(x, \lambda)$ in $0 \leq x \leq l$. Es wird $m^2(\lambda)$ für $\mu < 0$ zu $-\mu$, für $0 < \mu < (\pi/l)^2$ zu μ und für $\mu > (\pi/l)^2$ zu $(\pi/l)^2$ definiert. Beim Iterationsverfahren $y''_{n+1} \pm m^2(\lambda)y_{n+1} = [\pm m^2(\lambda) - Q(x, \lambda)]y_n$ (y_{n+1} erfüllt die Anfangsbedingungen, $n = 0, 1, 2, \dots$) konvergiert y_n gegen die Lösung y für alle λ , und zwar für $y_0(x, \lambda) \leq y(x, \lambda)$ alternierend, d. h. y_2, y_4, \dots sind untere, y_1, y_3, \dots obere Schranken für y . Das wird auf die Eigenwertaufgabe $y'' + [\lambda \varrho(x) - q(x)]y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$ angewandt, indem $\partial y(x, \lambda)/\partial \lambda = 1$ hinzugenommen wird. Mit $y_{2k}(l, \lambda) \leq y(l, \lambda) \leq y_{2k-1}(l, \lambda)$ erhält man auch obere und untere Schranken für den Eigenwert λ . Zahlenbeispiel für den kleinsten Eigenwert bei $y'' + \lambda(1+x)y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$.

L. Collatz.

● **Dubošin, G. N.:** Grundzüge der Theorie der Stabilität der Bewegung. Moskau: Verlag der Moskauer Universität 1952. 318 S. R. 8.30 [Russisch].

Dans son célèbre ouvrage, traduit en français sous le titre: „Problème général de la stabilité des mouvements“ (Moskau 1950; nous noterons P les références à ce livre), A. Liapounov a édifié la théorie de la stabilité des solutions de certains systèmes différentiels. Le champ d'application de la théorie n'a pas cessé de s'étendre depuis soixante ans et l'oeuvre du mathématicien russe est loin d'avoir épuisé sa fécondité. Aussi bien, le nombre des lecteurs de P s'accroît; mais sa lecture n'en demeure pas moins difficile au néophyte. Il y a donc un intérêt majeur à présenter l'essentiel de P d'une manière accessible aux étudiants: c'est le but poursuivi par l'A. du présent ouvrage. L'A. suit P de très près; mais il simplifie souvent les démonstrations, multiplie les exemples, commente très clairement les passages difficiles. Il semble que l'A. a pleinement atteint son but; son livre rendra bien des services — Analysons rapidement la table des matières. Chap. I: Définitions de la stabilité au sens de Liapounov; formation des équations aux variations du système différentiel donné, de celles du mouvement perturbé. Chap. II: Méthode d'intégration des équations au moyen des séries de Liapounov. L'A. insiste sur les services que peut rendre cette méthode en analyse et en physique mathématique et met en évidence les difficultés de son emploi pour obtenir des critères pratiques de stabilité: notons qu'il s'agit là, au fond, d'une variante heureuse des résultats de Cauchy concernant les équations différentielles analytiques. Chap. III: La méthode de Liapounov proprement dite, basée sur l'emploi de la fonction V : critères pratiques de stabilité de Liapounov. Cas ordinaire; cas singulier. C'est ici qu'on trouvera l'essentiel de la théorie de Liapounov. Chap. IV: Solution du problème de la stabilité dans le

cas où le système donné se réduit, en première approximation, au système linéaire à coefficients constants; l'examen des cas singuliers (où l'équation caractéristique a une racine nulle ou un couple de racines imaginaires conjuguées) est renvoyé au chapitre V. Le chap. VI est consacré aux solutions périodiques des systèmes différentiels dans le cas où l'équation caractéristique admet un couple de racines imaginaires. On peut alors former, parfois, une intégrale des équations du mouvement indépendante du temps; l'A. montre comment s'en servir pour discuter de la stabilité du mouvement étudié. Enfin, le chap. VII donne des indications concernant le cas difficile où la partie linéaire des seconds membres du système différentiel admet pour coefficients des fonctions continues et bornées du temps. L'A. estime que les développements modernes de la théorie ne fournissent pas encore de critères commodes pour discuter de la stabilité des mouvements dans les cas intéressant les applications; c'est là peut-être une appréciation un peu pessimiste. — Au total, le présent livre n'épuise pas le contenu de P; mais il en donne l'essentiel.

J. Kravtchenko.

Veiga de Oliveira, F.: Charakteristische Exponenten. Anwendung auf die Stabilität. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 201—288 (1952) [Portugiesisch].

Very clear expository article emphasizing linear-algebraic ideas and vector-matrix notation. Topics covered: linear systems with constant or variable coefficients, characteristic exponents, analytical form of the solutions, canonical equations and transformations, perturbations of an equilibrium or periodic solution, development of the perturbations in powers of $e^{\lambda_i t}$ (λ_i : characteristic exponents). The article is to be continued.

J. L. Massera.

Amerio, Luigi: Analisi delle nozioni di „nodo“, „nodo a stella“ e „fuoco“, estese ai sistemi di due equazioni differenziali in tre variabili. Rivista Mat. Univ. Parma 3, 207—231 (1952).

Suite d'un précédent travail (ce Zbl. 43, 89) au compte-rendu duquel nous renvoyons pour les définitions et notations. X et Y ne sont plus supposées périodiques. L'A. étudie le cas du noeud et du foyer dans l'hypothèse $\lambda \neq 0$. Il prouve l'équivalence topologique du cas du foyer ($0 < \lambda^2 < \Delta$) et d'un cas particulier de noeud ($A = D, B = C = 0$). Dans ce dernier cas, il montre l'existence d'un faisceau de surfaces principales passant par O . Enfin pour $\lambda \neq 0, \Delta = 0$, il montre l'existence d'au moins une surface principale, sur laquelle les intégrales sont asymptotes à la solution $(0, 0)$.

A. Revuz.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Aruzzo, Giulio: Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne. I. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 13, 367—372 (1952), 14, 13—18 (1953).

Une forme différentielle extérieure ω_r de degré $r, 0 \leq r \leq n$, à coefficients continus dans un domaine de R^n , est dite différentiable s'il existe une forme, à coefficients continus, de degré $r+1$: σ_{r+1} telle que l'on ait la formule de Stokes généralisée: (1) $\int_{\partial D_{r+1}} \omega_r = \int_{D_{r+1}} \sigma_{r+1}$, pour tout $(r+1)$ -champ d'intégration D_{r+1} de bord ∂D_{r+1} ; l'on écrit $d\omega_r = \sigma_{r+1}$ et l'on dit que la forme ω_r est fermée si $\sigma_{r+1} = 0$. Des conditions nécessaires et suffisantes de différentiabilité peuvent être déduites de la propriété suivante. Soient respectivement $a_{i_1 \dots i_r}(x), b_{i_1 \dots i_{r+1}}(x)$ les tenseurs covariants antisymétriques associés aux formes ω_r, σ_{r+1} . Soient, d'autre part, deux systèmes antisymétriques de fonctions continues $A_{i_1 \dots i_r}, B_{i_1 \dots i_{r+1}}$ tels que

$$\partial^r A_{i_1 \dots i_r} / \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r} = a_{i_1 \dots i_r}(x), \quad \partial^{r+1} B_{i_1 \dots i_{r+1}} / \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{r+1}} = b_{i_1 \dots i_{r+1}}(x).$$

Dans ces conditions (1) est équivalent à

$$(2) \quad B_{i_1 \dots i_{r+1}} = \sum_{h=1}^{r+1} (-1)^{1+h} A_{i_1 \dots i_{h-1} i_{h+1} \dots i_{r+1}} + \sum_{h=1}^{r+1} \lambda_{i_1 \dots i_{h-1} i_{h+1} \dots i_{r+1}},$$

où $\lambda_{i_1 \dots i_{h-1} i_{h+1} \dots i_{r+1}}$ est indépendant de x_{i_h} . — L'emploi de certaines fonctions rationnelles associées aux polynômes d'approximation de Stieltjes-Landau-Tonelli permet alors de formuler sans peine les conditions en question. D'une manière générale l'opérateur d jouit des mêmes propriétés que l'opérateur classique de la différentielle extérieure des formes à coefficients continûment différentiables. L'A. établit en particulier que la relation $d(\omega_r dx_{k+1} \dots dx_{k_p}) = 0$ est encore équivalente à $d\omega_r = 0$, modulo $dx_{k+1} = \dots = dx_{k_p} = 0$.

Th. Lepage.

Cinquini Cibrario, Maria e Silvio Cinquini: Ancora sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. 6, 187—243 (1952).

Les AA. complètent un travail antérieur (ce Zbl. 45, 199) et donnent un théorème d'existence et d'unicité des solutions de l'équation aux dérivées partielles (1) $p = f(x, y, z, q)$. Au lieu de chercher des solutions $z(x, y)$ continues ainsi que $p = z'_x$, $q = z'_y$, on cherche des solutions avec z, z'_y continues, $z(x, y)$ absolument continue en x pour y fixé, l'équation (1) étant alors satisfaite, pour y fixé quelconque, par presque toute valeur de x . Etude du problème de Cauchy: $z(0, y) = \varphi(y)$ donné. On suppose f défini pour x, z, q appartenant à des intervalles et y dans une bande $g(x) < y < h(x)$; f_y, f_z, f_q sont supposées presque continues en x , pour tout (y, z, q) fixé, continues de (y, z, q) pour tout x fixé, et de plus vérifient ainsi que f des conditions de Lipschitz d'ordre 1 par rapport aux variables (y, z, q) , avec des coefficients $L_i(x)$ sommables en x . Diverses formes sont données au théorème d'unicité. La méthode suit d'assez près celle utilisée par Carathéodory dans l'étude des théorèmes d'existence des équations différentielles. P. Lelong.

Haimovici, Mendel: Sur l'intégration des systèmes de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux fonctions inconnues de deux variables indépendantes. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 585—589, ungarische und russische Zusammenfassgn. 589, 590 (1952).

Ausdehnung der Methode von Darboux auf ein System (*): $F_i(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0$ ($i = 1, 2$) von partiellen Differentialgleichungen. Durch Einführung zweier Parameter σ, τ wird (*) in ein System äußerer Differentialgleichungen umgeschrieben. Seine (zweidimensionalen) Charakteristiken sind Lösungen eines Systems linearer Differentialgleichungen. Die vom Verf. entwickelte Methode ist nun anwendbar, wenn eine integrierbare Kombination dieser Gleichungen existiert. Dann erhält man nämlich eine Bindung zwischen σ und τ und kann einen dieser beiden Parameter eliminieren. Die zweidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten von (*) genügen jetzt einem einfacheren System äußerer Differentialgleichungen, dessen (eindimensionale) Charakteristiken sich als Lösungen eines vollständig integrierbaren Systems von vier linearen Differentialgleichungen bestimmen lassen. Damit ist das Problem (*) auf die Quadratur gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt. Johannes Nitsche.

Moisil, Gr. C.: Théorie préliminaire des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires aux coefficients constants. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 319—394, russische und französ. Zusammenfassgn. 394—397, 397—401 (1952) [Rumänisch].

In der umfassend angelegten Arbeit behandelt Verf. Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, besonders Systeme von der Form

$$\sum P_{ij}(\partial/\partial x) \varphi_j = 0,$$

wo die $P_{ij}(X) \equiv P_{ij}(X_1, \dots, X_r)$ Polynome in r Veränderlichen sind und $P_{ij}(\partial/\partial x)$ den Differentialoperator bezeichnet, der dem Polynom $P_{ij}(X)$ entspricht. Jedes solche System ist damit durch eine Matrix $P_{ij}(X)$ gekennzeichnet, deren Elemente Polynome sind. — Es werden zunächst die Lösungen im Fall einer quadratischen regulären Matrix untersucht und Potentiale angegeben, die Lösungen darstellen. Ist die Matrix singular, dann sind die Gleichungen des Systems durch lineare Differentialbeziehungen untereinander verknüpft. Auch für diesen Fall werden Lösungen angegeben. Im Falle eines beliebigen Systems wird ein Kriterium dafür mitgeteilt, daß zwischen den Gleichungen des Systems eine lineare Differentialbeziehung besteht, außerdem ein Verfahren zur Ermittlung dieser Beziehungen. Zerfällt die Matrix P , dann gibt es Zwischenintegrale. Die verschiedenen Fälle, in denen sich die Lösungen durch Potentiale verschiedener Art darstellen lassen, werden ausführlich erörtert. — Im zweiten Teil der Arbeit werden die gewonnenen Ergebnisse auf einige Differentialgleichungen der mathematischen Physik angewandt, als da sind ebene und räumliche Probleme der Elastizitätstheorie, langsame Bewegungen inkompressibler Flüssigkeiten, kleine Schwingungen elastischer Körper. Am Schluß der Arbeit eine ausführliche Zusammenstellung des einschlägigen Schrifttums. W. Quade.

Aronszajn, N.: Applied functional analysis. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 123—127 (1952).

Der Verf. referiert über Anwendungen der Methoden des Hilbertschen Raumes in der Theorie der Rand- und Eigenwertprobleme der partiellen Differentialgleichungen. Es werden zwei Methoden hervorgehoben, nämlich die der orthogonalen Projektion

und die der selbstadjungierten Fortsetzungen — hier wird auf die bekannten Hauptschwierigkeiten hingewiesen. Der Verf. betont die Vorteile der Methoden des Hilbertschen Raumes und zwar: 1° die große Allgemeinheit in bezug auf die Ordnung und Regularität der Differentialoperatoren und die Klasse der zugelassenen Gebiete, 2° die Probleme werden gleichsam vom höheren Standpunkt aus betrachtet, das Wesentliche hervorgehoben und die vollständige Analysis des Problems ermöglicht, 3° die alten effektiven Approximationsmethoden wurden erst auf dem Grunde der abstrakten Theorie exakt formuliert und vervollkommenet, neue geschaffen. — Das Referat wird den mit klassischen Methoden arbeitenden Spezialisten auf die schöne weittragende moderne Behandlung der linearen Differentialprobleme aufmerksam machen.

K. Maurin.

Mambriani, Antonio: Determinazione delle soluzioni razionali intere di particolari equazioni alle derivate parziali. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 127—132 (1952).

Es wird bewiesen, daß alle Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \quad (1+x)y z_{x,y} - n x z_x - m y z_y + m n z = 0 \quad (m, n = 0, 1, \dots),$$

die bezüglich einer oder beider Veränderlichen x und y ganzrational sind, in dem Ausdruck (2) $z(x, y) = z_{m,*}(x, \varphi(y)) + z_{*,n}(\psi(x), y)$ enthalten sind. In (2) ist

$$z_{m,*}(x, \varphi(y)) = \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} \varphi_{\mu}(y) x^{m-\mu} \text{ eine bezüglich } x \text{ ganzrationale Funktion, deren}$$

Koeffizienten $\varphi_{\mu}(y)$ dadurch berechnet werden, daß man gewisse Operatoren auf eine willkürliche Funktion $\varphi(y)$ anwendet. Eine analoge Bedeutung kommt der Funktion $z_{*,n}(\psi(x), y)$ zu. Die ganzrationalen Lösungen von (1) werden aus (2) durch günstige Spezialisierung der willkürlichen Funktionen φ und ψ erhalten.

D. Greco.

Dungen, Frans H. van den: Sur un variant intégral associé à l'équation des ondes. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 532—533 (1952).

Werden bei der Wellengleichung $u_{xx} + u_{yy} = c^{-2} u_{tt}$, mit den Anfangsbedingungen $u = f(x, y)$, $\partial u / \partial t = g(x, y)$ für $t = 0$, eine in der Ebene $t = 0$ gelegene geschlossene konvexe Kurve C_0 betrachtet und die von den Punkten dieser Kurve ausgehenden charakteristischen Kegel, dann begrenzen diese Kegel in der Ebene $t = \text{const}$ ein Gebiet S (Ort der Punkte, die im Zeitpunkt t von der Welle erreicht werden). Verf. zeigt, daß das Integral $V = \iint_S u dS$ eine lineare Funktion

der Zeit ist und damit eine Integralvariante im de Donderschen Sinne [vgl. Th. de Donder, Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci. 44, 1043—1073 (1913)]. Es ist $V = \iint_{S_0} f dS + t \iint_S g dS$. Solche Integralvarianten sind für die numerische Integration von

Nutzen, da sie gestatten, die Ergebnisse der Rechnung zu kontrollieren. Das vom Verf. mitgeteilte Ergebnis kann auf mehrdimensionale Räume ausgedehnt werden; ist das Integrationsgebiet beschränkt und müssen Randbedingungen berücksichtigt werden, dann ist die Anwendung der Integralvariante an die Trennung in reflektierte und nicht-reflektierte Welle gebunden.

W. Quade.

Sagomonjan, A. Ja.: Untersuchung der linearisierten Gleichung der automodulierten, instationären Bewegung einer Flüssigkeit. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 9 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 6), 3—8 (1952) [Russisch].

L'A. construit les solutions du type: $\varphi(x, y, t) = t \varphi_1(x/t, y/t)$ de l'équation des ondes cylindriques:

$$(1) \quad \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 = a^{-2} \partial^2 \varphi / \partial t^2.$$

La transformée (E) de (1) en variables: $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ est hyperbolique (ou elliptique) dans le domaine D_H : $\xi^2 + \eta^2 > a^2$ (ou D_E : $\xi^2 + \eta^2 < a^2$). L'A. donne

quelques propriétés des caractéristiques de (1) dans D_H ; puis, utilisant une remarque de Tchaplyguine, exprime l'intégrale de (1) dans D_E au moyen d'une fonction analytique de variable complexe. — On peut maintenant résoudre une série de problèmes aux limites pour les régimes non stationnaires mixtes (comportant à la fois une zone sursonique et une zone subsonique). Les solutions sont dépourvues de singularités dont sont affectées les solutions correspondantes dans le cas stationnaire.

J. Kravtchenko.

Elianu, I. P.: Le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles linéaires et polyhyperboliques normales. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 3, 367—464 u. russ. u. français. Zusammenfassg. 464—469, 469—474 (1952) [Rumänisch].

L'A. étudie l'équation aux dérivées partielles (1) $F^p u = 0$, où (2) $F = A^{ij} \partial^2 / \partial x^i \partial x^j + B^i \partial / \partial x^i + C$, A^{ij} , B^i et C étant holomorphes. Après avoir mis l'équation (1) sous forme invariante $F = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta} + h^{\alpha} \nabla_{\alpha} + k$ avec $g^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}$, on cherche une solution de la forme $u = UG^q$, $G = 0$ étant une surface sans points singuliers et U une fonction régulière. On trouve que la surface $G = 0$ est caractéristique. En introduisant la conoïde caractéristique $\Gamma = 0$, on obtient dans le cas d'un nombre impair de variables ($n = 2m + 1$) la solution élémentaire algébrique $u = U \Gamma^{-m+p-1/2}$, U étant une fonction holomorphe se réduisant à l'unité au point P et dont l'expression est $U = \Sigma U_r \Gamma^r$, les U_r pouvant être calculés par un procédé d'itération. Si $n = 2m > 2p$, la solution élémentaire est $u = U \Gamma^{-m+p} + V \log \Gamma + w$, U , V et w étant des fonctions holomorphes, U se réduisant à l'unité au point P . U et V ont des développements bien déterminés. Si $n = 2m \leq 2p$, la solution élémentaire est $u = \Gamma^{-m+p} V \log \Gamma + w$, V et w étant holomorphes, la première se réduisant à l'unité en P et ayant un développement bien déterminé. Dans la deuxième partie du travail, l'A. résout le problème de Cauchy pour une surface donnée S et l'équation (3) $F^p u = \varphi$, F étant l'opérateur (2) supposé hyperbolique normal et φ étant une fonction connue régulière des variables x . Si les données sont telles que le problème soit correctement posé, il y a une intégrale unique de (3) telle que les valeurs prises sur S par u , Fu , \dots , $F^{p-1}u$ et du/dv , dFu/dv , \dots , $dF^{p-1}u/dv$ (les dernières désignent des dérivées normales) soient connues d'avance. On établit ensuite la formule fondamentale et on suppose qu'il s'agit du problème intérieur et que $dF^i u/dv$ admettent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre max $(0, m-i)$, u jusqu'à l'ordre $\max(m+p-1, 2p)$, φ jusqu'à l'ordre $\max(0, m-p)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, p-1$). Dans ces conditions on arrive à des formules résolutives différentes suivant que 1. $n = 2m + 1$, 2. $n = 2m > 2p$, 3. $2 < n = 2m \leq 2p$, 4. $2 = n = 2m \leq 2p$. Dans la troisième partie, on applique les résultats obtenus à l'équation itérée des ondes. *M. Haimovici.*

Prodi, Giovanni: Soluzioni periodiche di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico e non lineari. Rivista Mat. Univ. Parma 3, 265—290 (1952).

Bezeichnungen. Es sei E_1 die reelle Zahlgerade (ohne $\pm \infty$) und $J = [0, a] \subset E_1$; ferner sei D die Menge der $Z = (x, t, u, v)$ mit $x \in J$ und mit $t, u, v \in E_1$. — Vor. (1) Die reelle (eindeutige, endliche) Funktion $f = f(Z)$ sei stetig in D und genüge überall in D lokal einer Hölderbedingung. Ferner sei f periodisch relativ t mit der Periode T , d. h. $f(Z) = f(x, t, u, v) = f(x, t + T, u, v)$ für alle $Z \in D$. — (2) Für $f(x, u, v) = \text{Max}(f(Z); 0 \leq t \leq T)$ besitze die gewöhnliche Differentialgleichung $\ddot{u}'' + f(x, \bar{u}, \bar{u}') = 0$, $x \in J$, eine Lösung $\bar{u}(x)$, welche in den Endpunkten von J positive Werte annimmt. Entsprechend besitze für $f(x, u, v) = \text{Min}(f(Z); 0 \leq t \leq T)$ die Differentialgleichung $u'' + f(x, u, u') = 0$ eine Lösung $u(x)$, welche in den Endpunkten von J negative Werte annimmt. Außerdem soll sein $u(x) < \bar{u}(x)$ für jedes $x \in J$. — (3) Zu jedem $M > 0$ existiert eine positive, nichtabnehmende Funktion $g(y; M)$, $0 \leq y$, mit $g(y; M) = o(y^2)$ für $y \rightarrow +\infty$ und derart, daß $|f(Z)| \leq g(|v|; M)$, wenn $|u| \leq M$ für alle $Z \in D$. — Beh. Die partielle Differentialgleichung $u'_t = u''_{xx} + f(x, t, u, u_x)$ besitzt (mindestens) eine bezüglich t mit der Periode T periodische Lösung $u(x, t)$, für welche $u(0, t) = u(a, t) = 0$, $t \in E_1$, $x \in J$. — Für den Fall, daß f nur von x und t abhängt und der Vor. (1) genügt (bezüglich x, t), gibt es genau eine der Beh. genügende Lösung. — Anhangsweise wird am Beispiel einer Differentialgleichung $z'_t = z''_{xx} + h(z)$ gezeigt, daß die im Referat dies. Zbl. 29, 42 (Haupt) über eine Arbeit von Dž. Ch. Karimov angegebene Beh. der Eindeutigkeit der Lösung nicht richtig ist. *Otto Haupt.*

Krzyżański, M.: Sur le second problème aux limites pour les équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique et parabolique dans un domaine non borné. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 5, 1—18, poln. und russ. Zusammenfassg. 18—19, 19—21 (1952).

Per i problemi al contorno indicati nel titolo e relativi a equazioni in m variabili

si stabiliscono dei teoremi di esistenza e di unicità della soluzione nell'ipotesi che il dominio considerato si possa approssimare con una successione di domini limitati per i quali il problema sia risolvibile. I risultati sono analoghi a quelli ottenuti dall'A. (questo Zbl. 30, 389) per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni di tipo ellittico. Vedi anche L. Amerio, Atti Accad. Italia, VII. Ser. 4, 1—12 (1943).

C. Miranda.

Olejnijk, O. A.: Über Gleichungen vom elliptischen Typus mit einem kleinen Parameter bei den höchsten Ableitungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 104—117 (1952) [Russisch].

Ausführliche Behandlung des in dies. Zbl. 47, 341 betrachteten dritten Randwertproblems der Gleichung $\varepsilon \Delta u + A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = f(x, y)$, insbesondere des asymptotischen Verhaltens einer Lösung u für $\varepsilon \rightarrow 0$. Dort konnte Verf. sich von einigen, hier noch notwendigen, einschränkenden Voraussetzungen frei machen.

K. Maruhn.

Gagua, M.: Zur Frage der besten Approximation der Lösungen von Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 7—10 (1952) [Russisch].

Gagua, M.: Über Abschätzungen der besten Approximation der Lösungen gewisser Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 225—228 (1952) [Russisch].

Aussagen von Walsh und Mitarbeitern für beste Approximationen harmonischer Funktionen durch harmonische Polynome werden auf die Lösungen gewisser Differentialgleichungen (E_0) von elliptischem Typ übertragen und fortgeführt. Es handelt sich um die Differentialgleichung,

$$(E_0) \Delta u + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0, \quad \Delta = \text{Laplacescher Operator};$$

a, b, c seien reelle ganze Funktionen für reelle x, y ; T ein endliches einfach zusammenhängendes Gebiet, L sein Rand, evtl. dargestellt in Polarkoordinaten durch $r(\varphi)$; L_ϱ ($\varrho > 1$) äußere Niveau-line; sie berande das endliche Gebiet T_ϱ ; \bar{T} ist die Abschließung von T , $\omega(\tau, u)$ deren Stetigkeitsmodul auf T . — Alle reellen regulären Lösungen von (E_0) in T lassen sich (bekanntlich) darstellen durch

$$(1) \quad u(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ G(z, 0, z, \bar{z}) \Phi(z) - \int_0^z \Phi(t) \frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z}) dt \right\},$$

wo Φ eine beliebige analytische Funktion bedeutet, $G(t, \tau, z, \bar{z})$ die sog. Riemannsche Funktion der Gleichung (E_0). Es werden diejenigen partikulären Lösungen $u_\nu(x, y)$ betrachtet, die aus für $\Phi = z^\nu$ entspringen ($\nu = 1, 2, \dots$), dazu $v_\nu = \operatorname{Im} \{ \dots z^\nu \dots \}$ und $u_0 = G(0, 0, z, \bar{z})$. Aus diesem System linear unabhängiger Funktionen werden Linearverbindungen n -ter Ordnung

$w_n(z) = a_0 u_0 + \sum_1^n \{ a_\nu u_\nu + b_\nu v_\nu \}$ mit bel. konstanten Koeffizienten gebildet und in ihren

Gesamtheiten \mathfrak{M}_n zur Definition bester Approximationen E_n herangezogen: Sei $E_n(u, T) = \inf_{w_n \in \mathfrak{M}_n} \sup_{(x, y) \in T} |u(x, y) - w_n(x, y)|$. Die erste Note richtet sich auf Schätzungen wie $E_n(u, T) \leq$

$M n^{-k-\alpha}$ unter der Annahme, daß $u(x, y)$ Randwerte mit k -ter Ableitung habe, die selbst einer Hölderbedingung zum Index α genüge ($0 < \alpha \leq 1$); alle M sind Konstanten. Umgekehrt: Erlaubt ein $u(x, y)$ Näherungen solcher Art und Güte, so ist es Lösung von (E_0), mit Ableitungen und Hölderbedingung wie eben (für $\alpha = 1$ gilt eine etwas abweichende Aussage). Es folgt eine Aussage für die Existenz von Randwerten mit der Eigenschaft $|u(s+h) + u(s-h) - 2u(s)| \leq \text{const.} \cdot h$, und eine über die Möglichkeit, stets eine reguläre Lösung zu finden, so daß $E_n(u, T)$ gleich vorgegebenen Werten $A_n \searrow 0$ wird. Also sind die Aussagen „beste“. — Analoga für T_ϱ, L_ϱ , dann kommt in den Schätzungen ein Faktor ϱ^{-n} hinzu. — Endlich der Hinweis, daß Hölderbedingungen durch andre ersetzbar sind u. a. m. — In der zweiten Note werden Schätzungen gegeben wie $E_n(u, T) \leq \text{const.} \omega((n^{-1} \log n)^\mu)$ wenn $\log r(\varphi)$ mit allen seinen Ableitungen gleichmäßig betragsbeschränkt ist (μ hängt von dieser Schranke ab), ferner eine Schätzung von $\omega(\tau, u)$ durch

$$\omega(\tau, u) \leq \text{const.} \min_{n \geq 1} \{ E_n(u, T) + \tau: d(L, L_{1+1/n}) \},$$

wo d die Distanz der beiden Kurven bedeutet. Ist in einem Randpunkt t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{E_n(u, T)} \bigg/ \log \frac{1}{d(t, L_{1+1/n})} = A,$$

so gestaltet $u(x, y)$ längs jedes Bogens, der von t ausgeht, ohne den Rand zu berühren, Ableitungen der Ordnung $[A]$, für die eine Hölderbedingung vom Index $A - [A]$ gilt. *E. Ullrich.*

Schröder, Kurt: Untersuchungen über biharmonische Funktionen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 571—584, ungarische und russische Zusammenfassgn. 584 (1952).

Bericht über die biharmonische Randwertprobleme behandelnden Arbeiten des Verf. [vgl. dies. Zbl. 27, 402; 28, 68; Forschungsber. d. deutsch. Luftfahrtforschung Nr. 1741, S. 14 (1942)]. *A. Huber.*

Green, John W.: On the spherical means of α -potentials. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 9, 7—11 (1952).

Bedeutet $A(u, P, r)$ das Raummittel über eine Kugel mit Mittelpunkt P und Radius r für die Funktion u im R_3 , so gibt es für Potentiale $u(P) = \int d\mu(Q)/PQ^\alpha$ ($1 < \alpha < 3$) nach Frostmann (dies. Zbl. 13, 63) eine Schranke $A(\alpha)$ derart, daß $A(u, P, r) \leq A(\alpha) u(P)$. Es gilt $1 < A(\alpha) < 3/(3 - \alpha)$. Verf. stellt für Oberflächenmittel $B(u, P, r)$ eine entsprechende Beziehung auf: $B(u, P, r) \leq 2^{1-\alpha} u(P)/(2 - \alpha)$. Hier kann $2^{1-\alpha}/(2 - \alpha)$ nicht mehr unterboten werden. Er gewinnt diese Schranke als obere Grenze der Funktion

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi \, d\theta \, d\varphi}{(1 + x^2 - 2x \cos \varphi)^{\alpha/2}},$$

welche das Verhältnis des Oberflächenmittels über die Einheitskugel des Potentials $1/x^\alpha$ zum Potential selbst darstellt. Danach zeigt Verf., daß auch beim Raummittel in analoger Weise gilt $A(\alpha) = \max g(x)$, wo $g(x) = [3x^{\alpha-1}/2(2 - \alpha)(3 - \alpha)] [(1 + x)^{3-\alpha} - (1 - x)^{3-\alpha} - ((1 + x)^{4-\alpha} - (1 - x)^{4-\alpha})/(4 - \alpha)]$. $A(\alpha)$ bedeutet die kleinste mögliche Schranke. Jetzt gelingt es aber nicht mehr, das Maximum explizit zu berechnen, sondern nur abzuschätzen. Verf. gewinnt neben der Abschätzung von Frostmann noch eine Abschätzung nach unten $3/(3 - \alpha) \cdot 2^{2-\alpha}/(4 - \alpha) \leq A(\alpha)$. Für $\alpha = 1$ stimmt diese untere Schranke samt ihrer ersten Ableitung mit $A(1)$ und $A'(1)$ überein, während für $\alpha \rightarrow 3$ die Frostmannsche Schranke $3/(3 - \alpha)$ asymptotischer Wert von $A(\alpha)$ ist. *G. L. Tautz.*

Kasner, Edward und John de Cicco: The Newtonian potential of a sphere of a Euclidean space E_N embedded in a Euclidean universe E_n . Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 905—911 (1952).

Es werden die Kräfte untersucht, die von einer N -dimensionalen Kugel und der diese begrenzenden $(N - 1)$ -dimensionalen Kugelfläche auf einen im n -dimensionalen euklidischen Raum ($n \geq N \geq 2$) befindlichen Punkt ausgeübt werden. Diese Kräfte lassen sich durch bestimmte Integrale darstellen und besitzen ein Potential. Verf. zeigen, daß sich unter Benutzung der hypergeometrischen Funktion $F[\alpha, \frac{1}{2}(N - 1); N - 1; z]$ eine einheitliche Darstellung der Kräfte und Potentiale gewinnen läßt. *W. Quade.*

Górski, J.: Sur un problème de F. Leja. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 273—278 (1952).

Es sei D ein nichtbeschränktes Gebiet in R_3 mit beschränkter Begrenzung F , und man bezeichne mit P_{1n}, \dots, P_{nn} ($n = 1, 2, \dots$) n Punkte von F mit der Eigenschaft, daß $\sum_{1 \leq i < k \leq n} \frac{1}{P_{in} P_{kn}} \leq \sum_{1 \leq i < k \leq n} \frac{1}{P_i P_k}$ für jedes System $P_i \in F$ ($i = 1, \dots, n$)

gilt. Es sei $u_n(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{P P_{in}}$, und der transfinite Durchmesser $d(F)$ von F sei positiv. Es wird bewiesen, daß die Folge $\{u_n(P)\}$ in der Umgebung eines beliebigen Punktes $P \in F$ gleichmäßig nach einer harmonischen Funktion $u(P)$ strebt und daß $u(P) < \frac{1}{d(F)}$ für $P \in D$, $u(P) = \frac{1}{d(F)}$ für $P \in D + F$ gilt. Ein Punkt $Q \in F$ verhält sich dann und nur dann beim Problem von Dirichlet in bezug auf D regulär, wenn es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ Zahlen $\delta(\varepsilon) > 0$ und $N(\varepsilon) > 0$ gibt, so daß $u_n(P) > 1/d(F) - \varepsilon$ für $PQ < \delta(\varepsilon)$, $P \in D$ und $n > N(\varepsilon)$ gilt. *Á. Császár.*

Variationsrechnung:

● Kimball, W. S.: *Calculus of variations by parallel displacement*. London: Butterworth 1952. VIII, 543 p. 50 s.

Wie schon an früherer Stelle (dies. Zbl. 30, 158), betrachtet Verf. das zu variierende Integral $\int f(x, y, y') dx$ als „Linienintegral“, d. h. in der Form $\int M dx + N dy$, wobei das spezielle Funktionenpaar $M = f - y' f_{y'}$, $N = f_{y'}$ als „Vektor-Integrand“ und sein Rotor, der nach einer Identität von Beltrami gleich $\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y$ ist, als „Flächenderivierte“ bezeichnet wird. Mit diesen Begriffen versucht Verf. einen Zugang zu den Elementen der Variationsrechnung zu schaffen, bei dem „mehr Nachdruck auf Geometrie und Mechanik als auf analytische Feinheiten gelegt wird“, aber die Darstellungsweise ist so formal und verworren, daß Rezensenten kaum instande war, den Gedankengängen des Verf. zu folgen. Das Buch enthält zahlreiche Übungsaufgaben — meist auch ganz formaler Art — und eine sehr ausführliche Behandlung einiger klassischer Probleme, wie Brachistochrone, Newtonsches Problem, Rotationsfläche kleinster Oberfläche. *M. J. de Schwarz.*

Kerimov, M. K.: *Über hinreichende Bedingungen für das Extremum bei unstetigen Variationsproblemen mit beweglichen Endpunkten*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 213—216 (1952) [Russisch].

In zwei vorangehenden Arbeiten (dies. Zb. 44, 101) wurden für ein ebenes Variationsproblem in gewöhnlicher Darstellung, bei dem die Endpunkte auf zwei Kurven beweglich sind, während längs einer zwischen ihnen verlaufenden dritten Kurve der Integrand springt, die notwendigen Bedingungen angegeben. Hier folgt die Angabe eines Systems von hinreichenden Bedingungen: Eulersche Gleichung, Transversalitätsbedingungen, Unstetigkeitsbedingung, verschärfte Bedingungen von Legendre und über die zweite Variation sind hinreichend für schwaches, zusammen mit der verschärften Weierstraßschen Bedingung für starkes Minimum. Der Beweisgang ist nicht angegeben, nur eine Reihe von Hilfssätzen, die dem Ref. teilweise unverständlich geblieben sind. *H. Boerner.*

Transue, W.: *Sopra un teorema di Cinquini sull'esistenza dell'estremo in campi illimitati*. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 333—336 (1952).

Si considera il problema dell'esistenza dell'estremo assoluto degli integrali
$$I_{C[n]}^{[n]} = \int_{C[n]} f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$$
, nella classe delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue insieme con le loro derivate dei primi $n - 1$ ordini e per le quali esiste finito l'integrale di Lebesgue $I_{C[n]}^{[n]}$. L'A. arreca un complemento a un teorema del relatore (questo Zbl. 17, 266) e rileva un nuovo teorema di esistenza.

S. Cinquini.

Hoggatt, Vern: *Maximum area in a corner*. Math. Mag. 26, 95—97 (1952).

Vorgegeben sei ein von zwei Halbgeraden L und L' der Ebene begrenzter Winkelraum vom Öffnungswinkel α und mit dem Scheitel S . Gefragt wird nach dem ganz im Winkelraum verlaufenden Kurvenbogen C fest vorgegebener Länge, welcher zwei Punkte P und P' von L und L' so verbindet, daß der von L , L' und C begrenzte Sektor einen größtmöglichen Flächeninhalt aufweist. Verf. zeigt, daß C der Kreisbogen mit Zentrum in S ist, falls $0 < \alpha < \pi$ gilt. Für $\alpha = \pi$ ist C einer der unendlich vielen Halbkreisbögen, deren Zentren auf L oder L' liegen. Falls $\pi < \alpha < 2\pi$ gilt, ist C einer der beiden Halbkreisbögen, für welche entweder $P = S$ oder $P' = S$ ist.

H. Hadwiger.

Tokarev, P. I.: *Geometrische Theorie der zweiten Variation im Lagrangeschen Variationsproblem*. Trudy Sem. vektor. tensor. Analizu 9, 431—455 (1952) [Russisch].

Der Verf. benutzt die Theorien von V. V. Vagner über „geometrische Objekte“, „Hyperstreifen“ und „zusammengesetzte Mannigfaltigkeiten“ (dies. Zbl. 41, 298, 300) zur Darstellung der ersten und zweiten Variation eines Lagrangeschen Variationsproblems.
W. Thimm.

Damkoehler, Guillermo: Definitheit und Reversibilität in der Variationsrechnung. Symposium problem. mat. Latino América (19—21 Dic. 1951), 41—63 (1952) [Spanisch].

Das Ziel der Arbeit ist, bei ebenen Variationsproblemen $\int F dt$ in Parameterdarstellung die beiden Bedingungen der Definitheit ($F \geq 0$) und der Reversibilität (jede Kurve, die im einen Sinn durchlaufen Extremale ist, ist es auch im andern) überflüssig zu machen. Es wird nur positive Regularität und die Stetigkeit der Ableitungen von F bis zur dritten Ordnung vorausgesetzt. Mit Hilfe des vom Verf. entwickelten Werkzeugs der „Kurvenkomplexe“ (dies. Zbl. 13, 310) wird folgendes bewiesen. (1) Ein ebenes „linsenförmiges“ Gebiet D sei von 2 Kurven L_1, L_2 begrenzt, die zwei Punkte P_1 und P_2 verbinden und die bez. D gerichtet F -extremalkonvex (Richtung von P_1 nach P_2) seien. Dann gibt es in D mindestens eine einfache F -Extremale von P_1 nach P_2 vom starken Minimumtyp. (2) L_1 und L_2 seien einfache F -Extremalen vom Minimumtyp, und in D laufe keine weitere solche von P_1 nach P_2 . Dann gibt es in D mindestens eine einfache F -Extremale von P_1 nach P_2 vom Typ Minimax und vom Index 0 oder 1 (Theorie von Morse). Beweise mit allen Details sollen anderswo veröffentlicht werden, ebenso die Beweise von einer ganzen Reihe von Sätzen, die mit Hilfe der genannten Existenzsätze ebenfalls ohne die Voraussetzung der Definitheit oder der Reversibilität bewiesen werden sollen: ähnliche Existenzsätze wie (1) und (2) für geschlossene Extremalen in ebenen ringförmigen [bei (2) auch kreisförmigen] Gebieten und auf geschlossenen Flächen vom Typ des Torus [bei (2) auch vom Typ der Kugel]; Existenz des Minimums, wenn der Endpunkt P'_1 zum Anfangspunkt P_1 konjugiert ist und die Enveloppe des Extremalbüschels durch P_1 in P'_1 eine P_1 zugekehrte Spitze hat, oder des einseitigen Minimums, wenn P'_1 regulärer Punkt der Enveloppe ist (Vergleichskurven nur auf der Enveloppe abgekehrten Seite). H. Boerner.

Szegö, G.: On certain set functions defined by extremum properties in the theory of functions and in mathematical physics. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 253—257 (1952).

L'A. indique brièvement beaucoup de recherches et résultats rassemblés et développés depuis dans son ouvrage (Polya-Szegö, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton 1951, ce Zbl. 44, 383), autour de la question suivante: Etant données des fonctions d'ensemble $f(E), g(E)$, on considère tous les E pour lesquels $g(E)$ est fixé et on cherche les maxima et minima de $f(E)$. On considère surtout le cas où $g(E)$ est de caractère géométrique (aire, volume etc.) et où $f(E)$ dépend d'un problème aux limites. Cela conduit à des liens et inégalités nombreuses entre les éléments géométriques ordinaires, la capacité, la fréquence fondamentale d'une plaque etc. A côté de questions anciennes, d'autres ont été développées récemment à l'Université de Stanford.
M. Brelot.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Pogorzelski, W.: Le noyau singulier fermé. Prace mat.-fiz. 48, 105—110 (1952).

Es sei $N(x, y)$ analytisch in x und y auf einem Streifen, welcher die reelle Achse enthält. N besitze für beide Variablen die reelle Periode a und für $x = y$ einen Pol erster Ordnung.

N heißt „abgeschlossen“, wenn die Gleichung (1) $\int_0^a N(x, y) \varphi(y) dy = 0$ keine anderen analytischen Lösungen als die triviale besitzt, falls das Integral als Cauchyscher Hauptwert definiert ist. Für die speziellen Kerne $N(x, y) = A_0(y) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} (x - y) + \sum_{\nu=1}^n A_\nu(x) B_\nu(y)$ (A_0, A_ν, B_ν analytisch im Streifen und mit reeller Periode a versehen) wird gefragt, wann N abgeschlossen ist. Mit Hilfe der Poincaréschen Formel

$$\int_0^a N_1(x, y) \left[\int_0^a N(y, z) \varphi(z) dz \right] dy = -\pi^2 R(x) R_1(x) + \int_0^a \left[\int_0^a N_1(x, y) N(y, z) dy \right] \varphi(z) dz$$

läßt sich (1) in eine Fredholmsche Gleichung mit ausgeartetem Kern transformieren. Aus deren Diskussion ergibt sich folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Abge-

geschlossenheit von $N(x, y)$: Es sei

$$\det \left| \int_0^a \frac{B_\nu(z)}{a^2 A_0(z)} C_\alpha(z) dz - \delta_{\alpha\nu} \right| \neq 0 \quad (\alpha, \nu = 0, 1, \dots, n),$$

wo

$$\int_0^a A_\nu(y) \left[1 + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{a} (x-y) \right] dy = C_\nu(x)$$

gesetzt wurde. Für die Notwendigkeit hat man noch zu verlangen, daß keine Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^n p_\nu A_\nu(x) = q \quad \text{mit konstanten } p_\nu, q \text{ besteht.}$$

G. L. Tautz.

Pogorzelski, Witold: Équations intégrales singulières. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 561—563, ungarische und russische Zusammenfassgn. 563, 564 (1952).

Bericht über den Kongreßvortrag vom 31. August 1950. Zunächst erwähnt Verf. das Ergebnis seiner Abhandlung über die Poincarésche Randwertaufgabe $du/dn + a(s) du/ds + b(s)u = f(s)$, u Lösung einer elliptischen Differentialgleichung (dies. Zbl. 17, 354; 19, 216), in welcher der von Poincaré nicht behandelte Fall $b(s) \neq 0$ nachgetragen wird. Die Lösung wird auf eine singuläre Integralgleichung mit Hauptwerten zurückgeführt. Weiterhin wendet sich

Verf. der Integralgleichung erster Art (1) $\int_0^a N(x, y) \varphi(y) dy = 0$ zu, wo $N(x, y)$ ebenfalls polare Singularität besitzt. Verf. erwähnt die von ihm gefundene Bedingung dafür, daß der Kern N abgeschlossen ist, d. h., daß (1) nur die triviale Lösung hat (vgl. vorhergeh. Referat). Ein solcher Kern wird in den beiden weiter erwähnten Fällen benutzt. Das nichtlineare Integralgleichungssystem

$$\int_0^a N_\nu(x, y) F_\nu[x, y, \varphi_1(y), \dots, \varphi_n(y)] dy = f_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

läßt sich nach J. Wolska durch Multiplikation und Integration mittels eines abgeschlossenen Kernes in einen einfacheren Gleichungstyp überführen. Ähnlich läßt sich die Gleichung

$$\int_0^a N(x, y) F[x, y, \varphi(y), \dots, \varphi^{(n)}(y)] dy = f(x) \quad \text{behandeln.}$$

G. L. Tautz.

Nikolenko, V. N.: Das Cauchysche Problem für eine Integro-Differentialgleichung vom Fredholmschen Typus. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 5 (51), 225—228 (1952) [Russisch].

Es wird die Integro-Differentialgleichung untersucht

$$y^{(n)}(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) y^{(n-k)}(x) = \lambda \int_a^b \sum_{k=0}^m K_k(x, t) y^{(m-k)}(t) dt$$

mit $n \geq m$, in $a \leq x \leq b$ stetigen Funktionen $a_k(x)$ und in $a \leq x, t \leq b$ beschränkten und integrierbaren Kernen $K_k(x, t)$. Durch die Substitution

$$y(x) = \sum_{s=0}^{n-1} C_s \frac{(x-x_0)^s}{s!} + \int_{x_0}^x \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} z(\tau) d\tau$$

mit der neuen unbekannten Funktion $z(x)$ und den n willkürlichen Konstanten C_s wird sie auf eine Integralgleichung der Form zurückgeführt: $z(x) = \sum_{s=0}^{n-1} C_s A_s(x) + \lambda \int_a^b K(x, x_0, \tau) z(\tau) d\tau$,

auf die die Fredholmsche Theorie in vollem Maße anwendbar ist. Dabei kann x_0 singuläre oder reguläre Werte annehmen je nachdem, ob λ Eigenwert des Kernes $K(x, x_0, t)$ ist oder nicht. Als Ergebnis erhält man: Existiert im Intervall $\langle a, b \rangle$ mindestens ein regulärer Punkt x_0 , so besitzt die Ausgangsgleichung n linear unabhängige Lösungen und das Cauchysche Problem, bezogen auf die Anfangsbedingungen $y^{(s)}(x_0) = y^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$), ist für die regulären Punkte x_0 eindeutig lösbar (durch geeignete Wahl der n willkürlichen Konstanten C_s). Ist x_0 singulär und λ Eigenwert des Kernes $K(x, x_0, t)$ vom Rang r und ist der Rang der Matrix

$\left\| \int_a^b A_s(x) \bar{z}_k(x) dx \right\|$ ($s = 0, 1, \dots, n-1, k = 1, 2, \dots, r$) gleich q , so besitzt die Ausgangsgleichung $n + r - q$ linear unabhängige Lösungen (weil nur $n - q$ der Größen C_s willkürlich sind, hingegen weitere r Konstanten \bar{B}_k auftreten), und das Cauchysche Problem für sie ist im allgemeinen nicht lösbar, sondern nur dann, wenn nur $n - q$ Anfangsbedingungen $y^{(s)}(x_0) = y_0^{(s)}$

vorgegeben werden. Dabei bedeuten $\tilde{z}_k(x)$ die r linear unabhängigen Lösungen der adjungierten homogenen Integralgleichung. r Funktionen $z_k(x)$ mit analoger Bedeutung für die homogene Integralgleichung selbst treten in der Lösung der ursprünglichen inhomogenen Integralgleichung naturgemäß, versehen mit den r neuen konstanten Koeffizienten B_k , als zusätzliche Glieder auf und erzeugen in der Lösung der Ausgangsgleichung r zusätzliche Glieder der Form

$$B_k \int_{x_0}^x \frac{(x-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} z_k(\tau) d\tau.$$

E. Svenson.

• **Doetsch, Gustav: Die Lösung von Randwert- und Anfangswertproblemen bei Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Transformation und anderer Funktionaltransformationen.** Madrid: Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica Esteban Teradas. 1952. 110 p. 55 pesetas. [Spanisch].

Wiedergabe einer Reihe spanisch gehaltener Vorträge zur Einführung in Sinn und Anwendung von Funktionaltransformationen, und zwar nicht nur der gewöhnlichen, sondern auch der zweidimensionalen und der zweiseitigen Laplace-Transformation. Verf. zeigt ferner, wann die endliche Fourier-Transformation am Platze ist und wie sich die Laplace-Transformation bei Integralgleichungen bewährt. Am Schluß der klaren und anregenden Ausführungen folgen Tabellen mit einigen Dutzend Beispielen zur Laplace-Transformation.

U. T. Bödewadt.

Doetsch, Gustav: Gelöste und ungelöste Probleme in der Theorie der Laplace-Transformation. Revista Acad. Ci. Madrid 46, 125—136 (1952) [Spanisch].

Dieser vom Verf. am 19. IV. 52 in der Akademie der Wissenschaften zu Madrid gehaltene Vortrag behandelt zwei Kernfragen aus der Lehre von der Laplaceschen Abbildung (L. A.) \mathcal{L}_f , deren erste so lautet: Welche Funktionen sind als Laplacesche Integrale (L. I.) darstellbar — kurz, gehören zur Klasse K_I^1 ? Zu ihrer Beantwortung zieht Verf. die zweiseitige L. A. \mathcal{L}_f heran, bei der sich das L. I. von $-\infty$ bis ∞ statt von 0 bis ∞ erstreckt. Unter den von ihm damit erzielten Ergebnissen seien folgende genannt: Es sei K_I die Klasse der in einer Halbebene $x_0 < \operatorname{Re} s$ als Grenzfunktionen $g(s)$ von L. Bildern (L. B. = L. I.) darstellbaren Funktionen — bei gleichmäßiger Konvergenz dieser L. B. gegen $g(s)$ in gewissen Bereichen. Ferner sei K_f^1 die Klasse aller in einer Halbebene analytischen Funktionen f , die dort für $|y| \rightarrow \infty$ der Beziehung $f(x + iy) = o(y)$ genügen, und zwar gleichmäßig in $x \geq x_0$. Es sei ${}_m K_I^2$ die Unter-

klasse der Mitglieder von K_f^2 , deren Mittelwert $m(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(s + r e^{i\varphi}) d\varphi$ auf einem Halbkreise zur Rechten irgendeines Punktes s für $r \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Dann gilt ${}_m K_I^2 \subset K_I$.

Für eine $f \in K_I^1$ braucht zwar nicht $f(s + r e^{i\varphi})$, muß aber $\left(\int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\delta} + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2} \right) f(s + r e^{i\varphi}) d\varphi$

für $r \rightarrow \infty$ gegen 0 streben, so klein auch $\delta > 0$ sei. — Der zweite Gegenstand des Vortrags ist die Konvergenz: Welche analytischen Eigenschaften von $\frac{1}{2}f(s)$ bestimmen die Konvergenzgerade \mathfrak{f} der $\mathcal{L}_f\{F\}$? Zwei hierher gehörige Fragen sind bis heute nicht beantwortet: 1. Bei welcher Klasse von Singularitäten im Unendlichen (S. i. U.) konvergiert $\mathcal{L}_f\{F\}$ in der gesamten Halbebene \mathfrak{H} der Ganzheit? 2. Wie hängt im gegenteiligen Falle der Abstand der Geraden \mathfrak{f} und des Randes der \mathfrak{H} von der Art der S. i. U. ab? — Einen geeigneten Ansatzpunkt zur Erforschung dieses Sachverhalts bietet eine Formel aus des Verf. „Handbuch der Laplace-Transformation“ I, Basel 1950, S. 235 (dies. Zbl. 40, 59).

L. Koschmieder.

Langebartel, Ray G.: The convolution of the kernel $x^2 - t^2$. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 118—128 (1952).

Die von D. G. Bourgin (dies. Zbl. 38, 64) entwickelte und für den Kern $h(x, t) = x + t$, $0 \leq t \leq x$; $h(x, t) = 0$, $x < t$, $t < 0$ durchgeführte Methode zur Verallgemeinerung der Laplaceschen und anderer Transformationen wird für den Kern

$$h(x, t) = x^2 - t^2, \quad 0 \leq t \leq x; \quad h(x, t) = 0, \quad x < t, \quad t < 0 \quad \text{mit } \lambda > 0$$

dargestellt. Ableitung des Ergebnisses auch mittels der Methode der fraktionellen Integration und Differentiation (vgl. A. Erdelyi, dies. Zbl. 22, 132; G. Fox, dies. Zbl. 26, 410; H. Kober, dies. Zbl. 25, 185).

O. Volk.

Pistoia, A.: Alcuni teoremi tauberiani per la trasformata doppia di Laplace. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 170—190 (1952).

Für die zweidimensionale Laplace-Transformation

$$f(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px - qy} F(x, y) dx dy$$

werden Bedingungen, die sich auf f beziehen, angegeben, unter denen sie sich durch eine Verallgemeinerung der komplexen Umkehrformel, nämlich

$$F(x, y) = \lim_{(\sigma, \varrho) \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{f(i\alpha, i\beta)}{(1 + \varrho^2 \alpha^2)(1 + \sigma^2 \beta^2)} d\alpha d\beta$$

umkehren läßt. Auf Grund dessen werden Bedingungen für f formuliert, die auf $F(x, y) \rightarrow 0$ für $(x, y) \rightarrow \infty$ zu schließen gestatten. G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Dieudonné, Jean: Sur les sous-espaces linéairement compacts. Bol. Soc. Mat. São Paulo **6**, 53—60 (1952).

E sei im Folgenden ein lineartopologischer Raum über einem Schiefkörper K , d. h. ein linearer Raum, in dem durch ein System linearer Teilräume eine Basis zugleich offener und abgeschlossener Umgebungen der Null einer separierten Topologie erklärt ist. M sei ein linear kompakter Teilraum von E (für diesen Begriff vgl. S. Lefschetz, Algebraic Topology, 2. ed., New York 1948, dies. Zbl. **36**, 122). M besitzt stets einen topologischen Komplementärraum in E . Dasselbe gilt für lokal linear kompakte Teilräume von E . Ist N ein abgeschlossener linearer Teilraum von E , so ist $M + N$ stets abgeschlossen. Ist M algebraischer Komplementärraum zu N , so auch topologischer Komplementärraum. Ist E/N linearkompakt, so braucht N keinen topologischen Komplementärraum zu besitzen, wie an einem Beispiel gezeigt wird. Eine lineare Abbildung eines E in einen linear kompakten Raum F ist stetig, wenn der Graph in $E \times F$ abgeschlossen ist. Einige weitere damit zusammenhängende Resultate werden abgeleitet. G. Köthe.

Dieudonné, J.: Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 50—55 (1952).

Von N. Bourbaki (dies. Zbl. **42**, 353) wurden die bornologischen (bornologiques) und die tonnelierten (tonnelés) lokalkonvexen Räume eingeführt, zu denen die wichtigsten lokalkonvexen Räume der Analysis gehören. Es wird bewiesen, daß jeder lineare Teilraum (also auch ein nicht abgeschlossener) von endlicher Codimension eines bornologischen bzw. tonnelierten Raumes wieder bornologisch bzw. tonneliert ist. Beim Beweis wird ein Satz von G. Mackey gebraucht, wonach $E' + V'$ wieder „boundedly closed“ ist, wenn der zu E duale Raum E' „boundedly closed“ und V' ein endlich-dimensionaler Teilraum des algebraisch dualen Raumes E^* ist. Auch für diesen Satz wird ein neuer einfacher Beweis gegeben. G. Köthe.

Lejbenzon, Z. L.: Über die Trennung konvexer Mengen durch eine Hyperebene in linearen topologischen Räumen. Uspechi mat. Nauk **7**, Nr. 2, 165—167 (1952) [Russisch].

On démontre le théorème: Soient G_1, G_2 deux ensembles convexes dans l'espace vectoriel topologique E , $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $\text{int } G_1 \neq \emptyset$; il existe un hyperplan affine dans E , séparant G_1 et G_2 . La démonstration, très simple, est basée sur deux lemmes: 1. Si $G_1, G_2 \subset E$ sont des ensembles convexes, pour tout $x \in E$, l'une au moins des ensembles $L(G_1, x) \cap G_2$, $L(G_2, x) \cap G_1$ est non vide; 2. l'espace E se décompose en deux ensembles convexes E_1, E_2 , tels que $G_1 \subset E_1$, $G_2 \subset E_2$. L'A. semble n'avoir pas connu d'autres travaux sur le même sujet (S. Kakutani, M. H. Stone, V. L. Klee) dont le référent lui-même a pris connaissance assez tard. G. Marinescu.

Stone, M. H.: On the theorem of Gelfand-Mazur. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 238—240 (1952).

Ein neuer Beweis, der keinen Gebrauch von Liouvilles Satz macht, daß eine vollständige, lokal-konvexe topologische Algebra über den komplexen Zahlen, welche gleichzeitig ein Schiefkörper ist, der Körper der komplexen Zahlen sein muß. Diese Umformung des bekannten Gel'fand-Mazurschen Satzes für normierte Algebren ist von Arens schon bewiesen worden (mit Benutzung des Liouvilleschen Satzes) ohne die Bedingung der Vollständigkeit (dies. Zbl. 31, 251). *E. Hewitt.*

Schoenberg, I. J.: A remark on M. M. Day's characterization of inner-product spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal. Proc. Amer. math. Soc. 3, 961—964 (1952).

Ein reeller linearer Raum S mit den Elementen f, g, \dots besitzt eine „Halbnorm“ $\|f\|$, wenn die üblichen Normpostulate gelten, nicht notwendig aber die Dreiecksungleichung (a) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Die Halbnorm nennt Verf. „ptolemäisch“, wenn die Ungleichung (b) $\|f - g\| \|h - i\| + \|f - i\| \|g - h\| \geq \|f - h\| \|g - i\|$ gilt. Leicht zeigt man, daß (a) eine Folge von (b) ist. Verf. zeigt (nach einer Vermutung von L. M. Blumenthal), daß aus (b) sogar weitergehend folgt, daß in S ein inneres Produkt (f, g) existiert, welches in der üblichen Weise die Norm erzeugt, so daß S ein „inner-product-space“ ist. Aus (b) gewinnt der Verf. zunächst (c) $\|f - g\| + \|f + g\| \geq 4\|f\| \|g\|$ und schließt den Beweis mit einer Charakterisierung, welche etwas schwächer ist, als die von M. M. Day (dies. Zbl. 34, 217) entwickelte. *H. Hadwiger.*

Shika, Al.: Les topologies définies sur un A -module par une A -semi-norme. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Mat. Fiz. 4, 563—579 u. russ. u. französ. Zusammenfassgn. 580—581, 581—583 (1952) [Rumänisch].

L'A. continue ses recherches sur les anneaux A ordonnés et les modules semi-normés. Pour un anneau A , avec élément unité et réticulé, satisfaisant à certaines conditions supplémentaires, il donne la condition (nécessaire et suffisante) pour que la famille,

$$(\Phi_{\omega, \gamma})_{(\omega, \gamma) \in \Omega \times \Gamma}, \text{ où } \Phi_{\omega, \gamma} = \{\xi \mid |\omega| \xi \leq \gamma, \omega \in \Omega, \gamma \in \Gamma\},$$

(Ω étant un ensemble d'éléments idempotents $\neq 0$ et Γ un ensemble d'éléments réguliers, > 0) définisse une topologie compatible avec la structure d'anneau de A . Il considère ensuite un R^T -module unitaire, E , où R^T est l'ensemble des fonctionnelles réelles définies sur $T \neq \emptyset$, muni de la structure naturelle d'anneau et montre que le théorème d'extension de Banach-Hahn est valable pour toute forme linéaire $f(x)$, qui vérifie une inégalité de la forme $f(x) \leq p(x)$, p étant une application de E dans R^T , telle que $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ et $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\alpha \geq 0$. Il donne encore la condition (nécessaire et suffisante), pour qu'une application linéaire d'un R^T -module dans un R^T -module soit continue. *A. Froda.*

Ganapathy Iyer, V.: On the space of integral functions. III. Proc. Amer. math. Soc. 3, 874—883 (1952).

(Part I, II, ce Zbl. 31, 128; 37, 205). Dans la première partie, l'A. applique le théorème de Hahn-Banach (dont il ne semble d'ailleurs pas reconnaître la portée générale, car il réfère pour ce théorème à un de ses propres travaux!), à l'espace Γ des fonctions entières, muni de la topologie bien connue de la convergence compacte. Il obtient ainsi plusieurs exemples intéressants d'ensembles partout denses dans Γ : par exemple, il donne des conditions pour qu'une fonction entière $\alpha(z)$ et une suite (s_n) de points soient telles que la suite des fonctions $\alpha(s_n z)$ soit totale, ou encore pour que les „itérées“ de α , au sens de la composition des séries de Hadamard, forment une suite totale. Dans la seconde partie, l'A. commence par donner une condition de continuité pour les endomorphismes de Γ , qui est un cas particulier trivial de la condition de continuité d'une application d'un espace localement convexe dans un autre, exprimée au moyen de semi-normes. Suivent quelques considérations élémentaires sur les bases de Γ ; la question posée par l'A. relative à ce qu'il appelle les bases „propres“ ne paraît pas avoir de sens sans hypothèse supplémentaire sur ces

bases, car il est clair que si (α_n) est une base, il en est de même de (α_n/p_n) pour toute suite croissante de nombres $p_n > 0$, et une telle base peut fort bien être „impropre“ si les p_n croissent assez vite.

J. Dieudonné.

Alexiewicz, A.: On the localization of values of vector valued functions. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 288—297 (1952).

In the theory of analytic functions we can observe a plain analogy between uniqueness theorems and theorems of the Vitali type concerning the convergence of sequences of analytic functions. The purpose of the paper under review is to show that these analogies have a common source in a simple Lemma dealing with vector valued functions. Definitions and Notations: \mathfrak{A} : class of complex valued functions $\varphi(t)$ defined on a set T such that $\varphi(t) + c$ belongs to \mathfrak{A} whenever $\varphi \in \mathfrak{A}$ and c is a constant. A U -set is a set $A \subset T$ such that every function $\varphi \in \mathfrak{A}$ vanishing on A vanishes identically. X : complex Banach space. A function $x(\zeta)$ defined on a domain (connected open set) D of the complex plane with values in X is holomorphic on D if it is everywhere differentiable on D . $x(\zeta)$ is almost bounded if it is bounded on every compact subset of D . Similar definitions for „almost uniformly bounded“ and „almost uniformly convergent“. A set Γ of linear functionals ξ is fundamental if it „separates uniformly“ the vectors of X , more precisely if there are two positive constants K and k such that for every x in X
$$\sup_{\xi \in \Gamma, \|\xi\| \leq K} |\xi x| \geq k \|x\|.$$

Lemma. Assumptions: $x(t)$ is a function on T with values in X . For every linear functional ξ , the function $\xi x(t)$ belongs to \mathfrak{A} . L is a linear variety (hyperplane) in X . $x(t) \in L$ for every t in a U -set \mathfrak{A} . Assertion: All values of $x(t)$ belong to L . Dunford's criterion: The function $x(\zeta)$ is holomorphic on D if and only if it is almost bounded on D and if for every ξ of a fundamental set Γ the function $\xi x(\zeta)$ is holomorphic on D . Theorems: (1) If $x(\zeta)$ is holomorphic on D and vanishes on a set A having a limit point on D , then $x(\zeta)$ vanishes identically. (2) If the sequence $\{x_n(\zeta)\}$ of functions holomorphic on D is almost uniformly bounded on D and converges on a set having a limit point on D , then the sequence converges almost uniformly on D . Hints to the proofs: Choose \mathfrak{A} = class of holomorphic functions on D . (1) Apply Lemma for L = nullspace. (2) Introduce the Banach space $\mathbf{m}(X)$ of the bounded sequences $y = \{x_n\}$ of elements of X , with the norm $\|y\| = \sup \|x_n\|$ and regard the sequence $\{x_n(\zeta)\}$ as a function from D into $\mathbf{m}(X)$. Choose L = set of the convergent sequences $y \in \mathbf{m}(X)$, Γ = set of the functionals on $\mathbf{m}(X)$ of the form $\eta y = \xi x_n$, where ξ is any linear functional on X and n any positive integer. Other results: Theorems concerning X -valued functions, among them extensions of a theorem of Blaschke and a theorem of Khintchine.

Chr. Pauc.

Šilov, G. E.: Über homogene Funktionenringe auf dem Torus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 681—684 (1952) [Russisch].

In this note, special cases of a theory presented earlier are worked out [see Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 1 (41), 91—137 (1951)]. A complete classification is given for all homogeneous algebras R of type C of complex functions on the torus T such that $D_{11} \subset R \subset C$, where D_{11} is the algebra of all functions on T with continuous first partial derivatives and C is the algebra of all continuous functions. The torus is parametrized by variables (s, t) , $-\pi \leq s, t \leq \pi$. Apart from D_{11} and C , essentially the only possibilities are the following: (A) The algebra of all continuous complex functions f on T having a continuous partial derivative $\partial f / \partial s$, and with the norm $\|f\| = \sup \{|f| + |\partial f / \partial s|\}$; (B) the completion of the ring of all polynomials $P(s, t) = \sum a_{mn} e^{ims + int}$ $= u(s, t) + i v(s, t)$ under the norm $\|P\| = \sup_{s, t} \left\{ |P(s, t)| + \left| \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \right\}$.

The algebra (B) is identified as the algebra of all vectorially smooth functions, which the author has described elsewhere (this Zbl. 44, 57). All other function rings R as described are obtained from (A) by replacing $\partial f / \partial s$ by $\partial f / \partial \alpha$, an arbitrary directional derivative, or from (B) by locally affine changes of co-ordinates.

E. Hewitt (R.).

Vajnberg, M. M.: Über das Differential und den Gradienten von Funktionalen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3, 139—143 (1952) [Russisch].

Soit f une fonctionnelle définie dans un voisinage $V(x_0)$ de l'espace de Banach, E . On démontre les théorèmes: Théorème 1. Supposons remplies les conditions:

1° La différentielle de Gâteaux $V(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$ existe pour tout

$x \in U(x_0)$ et $h \in E$ et est continue dans x_0 (pour tout $h \in E$). 2° $V(x_0, h)$ est continue dans $h = 0$. — Alors $V(x_0, h)$ est linéaire et continue en h . — Théorème 2. Si la différentielle de Gâteaux, $Df(x_0, h)$, linéaire et continue en h , existe pour tout $x \in U(x_0)$ et si l'opération $\text{grad } f(x)$ [qui à tout $x \in U(x_0)$ fait correspondre la fonctionnelle (en h) $Df(x, h)$], est continue dans x_0 , alors il existe la différentielle de Fréchet $df(x_0, h) = Df(x_0, h)$. — On applique ensuite ces théorèmes à une fonc-

tionnelle de Lichtenstein

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{n-1}(t_1, t_2, \dots, t_n) \prod_{i=1}^n x(t_i) dt_i$$

et l'on prouve que son gradient est faiblement continu.

G. Marinescu.

Cristescu, Romulus: L'intégration dans les espaces semiordonnés. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Şti. Mat. Fiz. 4, 291—308, russ. und französ. Zusammenfassgn. 308—309, 309—310 (1952) [Rumänisch].

On construit une théorie de l'intégrale dans les espaces (K) de Kantorovitch, satisfaisant à l'axiome de la suite diagonale (D): si pour tout n , $x_n^k \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$, alors il existe une suite k_n strictement croissante telle que $x_n^{k_n} \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$. L'A. considère: 1. trois espaces (K) satisfaisant à l'axiome (D), F , M , I , et une application $(x, m) \rightarrow \langle x, m \rangle$ du produit $F \times M$ dans I , bilinéaire, (O)-continue et positive; 2. un ensemble T , une classe complètement additive \mathfrak{F} de parties de T et une mesure m définie sur \mathfrak{F} à valeurs dans M . Une suite f_n d'applications de T dans F converge presque uniformément vers f s'il existe un $m_0 \in M$, positif tel que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $M_\varepsilon \in \mathfrak{F}$ de mesure $\geq m(T) - \varepsilon m_0$ sur lequel f_n converge uniformément vers f . Une application f de T dans F est mesurable s'il existe une suite

(f_n) de fonctions simples mesurables (fonctions de la forme $\sum_{j=1}^m c_j \varphi_{E_j}$, où $c_j \in F$, $E_j \in \mathfrak{F}$ et

φ_{E_j} est la fonction caractéristique de E_j) qui converge presque uniformément vers f . Une fonction simple mesurable $\sum c_j \varphi_{E_j}$ est intégrable par définition et son intégrale est définie par l'égalité $\int_T f dm = \sum \langle c_j, m(E_j) \rangle$. Une fonction mesurable f est intégrable s'il existe une suite (f_n)

de fonctions simples mesurables convergeant presque uniformément vers f et telle que $(O) \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{n, k \geq p} \int_T |f_n(t) - f_k(t)| dm(t) = 0$; par définition $\int_T f dm = (O) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n dm$.

Les propriétés habituelles de l'intégrale restent valables; en particulier le théorème de Lebesgue sur les suites de fonctions intégrables. L'intégrale de l'A. est une généralisation de l'intégrale définie par Bochner (ce Zbl. 23, 116) pour des fonctions f à valeurs dans des espaces ordonnés, par rapport à une mesure réelle. Les méthodes employées sont semblables à celles de Bochner.

G. Marinescu.

Geronimus, Ja. L.: Über einige Extremalprobleme im Raume $L^{(p)}$. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 3—26 (1952) [Russisch].

Soit C une courbe de Jordan rectifiable autour de l'origine, ayant la longueur l , et $\sigma(s)$ une fonction décroissante sur le segment $[0, l]$. On désigne par $L_\sigma^{(p)}$ l'espace des fonctions complexes f définies sur C , de norme

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_C |f(\xi)|^p d\sigma(s) \right\}^{1/p} < \infty, \quad \xi = \xi(s), \quad p > 1$$

et on considère la fonctionnelle $A(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi) \frac{d\xi}{\xi}, f \in L_\sigma^{(p)}$. On déduit diverses conséquences

du théorème suivant: $\|A\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{1}{\xi \sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right|^q |d\xi| \right\}^{1/q} \leq \infty$; si $\|A\| < \infty$, la fonction extré-

male pour A est $f^*(\zeta) = \left| \frac{1}{\xi \sigma'(s)} \right|^{q/p} e^{i\tau}$ pour $\xi \in E, = 0$ pour $\xi \notin E$, E étant l'ensemble des ξ où $\sigma'(s) > 0$ existe et $e^{i\tau} = i \xi \int_C \frac{d\xi}{|\xi|} d\xi$; $\|A\| < \infty$ équivaut à chacune des propositions: 1. le système $\{\xi^{\pm n}\}_1^\infty$ n'est pas dense dans $L_\sigma^{(p)}$; 2. il existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\alpha} \left\| 1 + \sum_{\substack{x=-n \\ x \neq 0}}^n \alpha_k \xi^k \right\| = \|A\|^{-1}.$$

Pour $p = 2$ et C la circonférence $\xi = e^{i\theta}$, $\sigma(s) = \tau(\theta)$, on trouve l'expression de $M_n^2 = \min \left\{ \frac{\|G_n\|}{|A(G_n)|} \right\}^2$ où $G(z) = \sum_{\alpha=-n}^n \alpha_\alpha z^\alpha$. Si l'on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{2n}(e^{i\theta}) \overline{P_k(e^{i\theta})} d\tau(\theta) = \delta_{2n,k} \quad \text{où} \quad P_{2n}(Z) = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \cdots + \alpha_{2n} Z^{2n},$$

on trouve $1/M_n' = |\alpha_{2n}|^2 + |\alpha_{2n-1}|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 - |\alpha_{n-1}|^2 - \dots - |\alpha_0|^2$. Ensuite on étudie des problèmes analogues rattachées à la fonctionnelle

$$G_0(f) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_C \log |f(\xi)| |r'(\xi)| d\xi \right\},$$

où $Z = r(x)$ est la fonction inverse de $x = \varphi(z) = \alpha + z + b_2 z^2 + \dots$, $|z| < 1$.

G. Marinescu.

Mil'man, D.: Über Integraldarstellungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 9—10 (1952) [Russisch].

L'A. y applique ses recherches sur la frontière d'un bicomact convexe (voir ce Zbl. 29, 140; 30, 397; 46, 118). Soit Q un ensemble borné et fermé dans E_n (espace euclidien) et R un espace de fonctions réelles continues sur Q , contenant les constantes. On suppose que pour $q_1 \neq q_2 \in Q$ il existe $x \in R$ tel que $x(q_1) \neq x(q_2)$. On trouve une représentation de la forme $x(q_0) = \int_{\Gamma} x(q) d\sigma(I_q; q_0)$, Γ étant la frontière de Q dans un certain sens. On donne ensuite des conditions d'unicité pour la mesure $\sigma(I; q_0)$.

G. Marinescu.

Itô, Kiyosi: Complex multiple Wiener integral. Japanese J. Math. 22, 63—86 (1952).

Es wird die vom Verf. im Jahre 1951 (dies. Zbl. 44, 122) gegebene Definition für mehrfache Wiener'sche Integrale auf den Fall von komplexen normal verteilten stochastischen Variablen übertragen. Als mehrfaches Wiener'sches Integral definiert der Verf.

$$\int \dots \int f(t_1, \dots, t_p; s_1, \dots, s_q) d\bar{M}(t_1) \dots d\bar{M}(t_p) d\bar{M}(s_1) \dots d\bar{M}(s_q)$$

wobei die Mengen M von normalem stochastischen Maß. Der Verf. beweist eine Reihe interessanter Eigenschaften dieser Integrale und beschreibt ihren Zusammenhang mit Hermite'schen Polynomen von komplexen Variablen. Schließlich benutzt er die Resultate zur Herleitung von Sätzen betr. das ergodische Verhalten von temporär homogenen Prozessen.

W. Sazer.

Kakutani, Shizuo: Ergodic theory. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 128—142 (1952).

The author gives a comprehensive exposition of the progress in ergodic theory after the publication of E. Hopf's book „Ergodentheorie“ (Berlin 1937, this. Zbl. 17, 283). An exhaustive bibliography attached at the end of this paper will give much convenience to the readers. Thus various proofs together with extensions, sharpenings and the mutual relations of the mean and the individual ergodic theorems are discussed. Also the connections of the two ergodic theorems, especially of the individual ergodic theorem, with known theorems are pointed out and discussed in detail. For example, the connections with Hardy-Littlewood's maximal theorem, Ville-Doob's Martingale theorem and Riesz' differentiation theorem are stressed.

K. Yosida.

Godement, Roger: Some unsolved problems in the theory of group representations. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 106—111 (1952).

Es werden neunzehn ungelöste Probleme aufgezählt, die die unitären Darstellungen topologischer Gruppen in Hilbertschen Räumen betreffen, die Bestimmung der durch sie erzeugten Faktoren, die Theorie der Charaktere, die Dualitätstheorie, positivdefinite Funktionen, das Planchereltheorem, spezielle Fragen im Fall der Lieschen Gruppen, der Fuchsschen Gruppen.

G. Köthe.

Fukamiya, Masanori: On a theorem of Gelfand and Neumark and the B^* -algebra. Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, 17—22 (1952).

Soient R une B^* -algèbre à élément unité, D (resp. D_0) l'ensemble des éléments hermitiens de spectre ≥ 0 (resp. > 0). Alors, D est un cône convexe et D_0 est l'intérieur de D (cf. Kelley-Vaught, ce Zbl. 50, 110). Kaplansky a montré [cf. Math. Reviews 14, 884 (1953), revue du même article] que ces résultats entraînent la solution du problème de Gelfand-Neumark: toute B^* -algèbre est une C^* -algèbre. Les autres résultats du mémoire (ingénieusement établis) sont conséquences faciles de ce fait.

J. Dixmier.

Turumaru, Takasi: On the direct-product of operator algebras. I. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 242—251 (1952).

Soient A_1, A_2 deux C^* -algèbres. L'A. munit de la façon naturelle le produit tensoriel algébrique, qu'il note $A_1 \otimes A_2$, d'une structure de $*$ -algèbre. La plus grande „cross-norm“ au sens de Schatten fait de $A_1 \otimes A_2$ une $*$ -algèbre normée. Les produits tensoriels de formes linéaires positives élémentaires (= pures) sur A_1 et A_2 sont des formes linéaires positives sur $A_1 \otimes A_2$, suffisamment nombreuses, et permettent de définir une norme α pour laquelle le complété $A_1 \times_{\alpha} A_2$ de $A_1 \otimes A_2$ est une C^* -algèbre. Si A_1 et A_2 sont abéliennes [i. e. $A_1 = C(\Omega_1), A_2 = C(\Omega_2)$, Ω_1 et Ω_2 espaces compacts] l'espace normé $A_1 \times_{\alpha} A_2$ est isomorphe à $C(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
J. Dixmier.

McNerney, J. S.: Halfbounded matrices. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 151—176 (1952).

The numerical range $W(A)$ of a matrix A is defined as the set S such that $w \in S$ only if there exists a positive integer n and a sequence (x_1, \dots, x_n) of complex numbers such that

$$\sum_{p=1}^n |x_p|^2 = 1 \text{ and } w = \sum_{p,q=1}^n x_p A_{pq} \bar{x}_q. \text{ A half-bounded matrix is a matrix } M \text{ such that } W(M)$$

is not the entire plane; since the numerical range of a matrix is a convex set, a half-bounded matrix is a matrix M whose numerical range is contained in some half-plane. Thus, every bounded matrix and every Hermitian matrix is half-bounded, and the matrix associated with a positive definite J -fraction is half-bounded. — This contribution to the theory of infinite matrices is concerned with (1) the existence of a bounded reciprocal of $zI - A$, for A half-bounded and completely squarable and z at a positive distance from $W(A)$, (2) extension of the theory of Stieltjes transforms of nondecreasing functions, especially as related to J -fractions and the moment problem, to a theory of Stieltjes transforms of „nondecreasing matrices“, especially as related to completely squarable and half-bounded matrices and the matrix moment problem, and (3) application of the foregoing to the settling of certain problems concerning equivalent functions of positive definite J -fractions. A brief sketch of some of the results follows. — Suppose A is a half-bounded and completely squarable matrix and $d(z)$ is the distance from z to $W(A)$. For $d(z) > 0$ there exists a matrix $B(z)$ of regular functions, which is bounded by $1/d(z)$, is symmetric if A is symmetric, and is a reciprocal of $zI - A$. A reciprocal $B(z)$ of $zI - A$, for z in some unbounded set Z , determines A in various asymptotic senses depending on types of boundedness assumed for $B(z)$. For instance, if $B(z)$ has norm $b/|z|$, where b is a positive number, then $z[zB(z)_{pq} - I_{pq}] \rightarrow A_{pq}$ as $z \rightarrow \infty$ in Z . These ideas are extended to reciprocals of $zI - A - E(z)$ where $E(z)$ is a half-bounded matrix of regular functions. A nondecreasing

matrix is a matrix $G(t)$ of complex-valued functions over the real numbers, such that $\sum_{p,q=1}^n x_p G(t)_{pq} \bar{x}_q$

is a bounded and nondecreasing function $g(t)$ over the real numbers ($n = 1, 2, \dots, x_r$ any complex number), and $g(t) = g(t+) - g(-\infty)$. A unit nondecreasing matrix is a nondecreasing matrix $G(t)$ such that $G(+\infty) = I$. If $F(z)$ is a matrix of complex-valued functions defined

for $\text{Im } z > 0$, then, in order that $\sum_{p,q=1}^n x_p F(z)_{pq} \bar{x}_q$ ($n = 1, 2, \dots; x_r$ any complex number)

be a function $f(z)$, regular, $\text{Im } f(z) \leq 0$, and $zf(z)$ bounded as $\text{Im } z \rightarrow +\infty$ with $\text{Re } z = 0$,

it is necessary and sufficient that $F(z)$ be the Stieltjes transform $\int_{-\infty}^{+\infty} (z-t)^{-1} dG(t)$ of a nonde-

creasing matrix $G(t)$. A known sufficient condition for a function $f(z)$, regular for $\text{Im } z > 0$, to be the Stieltjes transform of a nondecreasing function g with $g(+\infty) - g(-\infty) = 1$ is extended to the necessary and sufficient condition: $|f(z) - (z - \bar{z})^{-1}| \leq |(z - \bar{z})^{-1}|$ for $\text{Im } z > 0$, and the analog for matrices is obtained. If $F(z)$ is the Stieltjes transform of the unit nondecreasing

matrix $G(t)$, $A = \int_{-\infty}^{+\infty} t dG(t)$, $B = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dG(t)$, and B is bounded, then there exists a nonde-

creasing matrix $E(t)$ such that $E(+\infty) = B - A A$ and, for $\text{Im } z > 0$, $zI - A -$

$\int_{-\infty}^{+\infty} (z-t)^{-1} dE(t)$ is the bounded reciprocal of $F(z)$. The problems about J -fractions concern

two conjectures on p. 318 of the reviewer's book „Analytic theory of continued fractions“ (New York 1948, this Zbl. 35, 36). Also, there is an addition to theorem 84.1, p. 316. H. S. Wall (R.).

Plans Sanz de Bremond, Antonio: Einige lineare Eigenschaften beschränkter Matrizen. Revista Acad. Ci. Madrid 46, 273—302 (1952) [Spanisch].

Une matrice infinie bornée A considérée comme opérateur dans l'espace hilbertien est appelée matrice bicontinue généralisée si pour toute suite convergente $\{y_n\}$, de l'ensemble des valeurs, il existe une suite convergente $\{x_n\}$, telle que $A x_n = y_n$. On désigne par \mathcal{B} l'ensemble de ces matrices et \mathcal{A} l'ensemble des autres matrices bornées. L'A. combine cette classification avec une classification selon la dépendance ou l'indépendance linéaire entre lignes ou colonnes et étudie l'inversion des matrices au point de vue de cette classification. La somme de deux éléments de \mathcal{B} n'appartient pas toujours à \mathcal{B} , mais leur produit y appartient. Si le produit de deux matrices de \mathcal{C} appartient à \mathcal{B} , il a les lignes et les colonnes dépendantes. *G. Marinescu.*

Šmul'jan, Ju. L.: Isometrische Operatoren mit unendlichen Defektindizes und ihre orthogonalen Erweiterungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 11—14 (1952) [Russisch].

The author extends some results of Livšic (this Zbl. 31, 167; 40, 353). Let T be a bounded operator on a Hilbert space H such that $\|Tx\| = \|x\|$ for x in a linear closed subspace G of H and $T(G^\perp) \subset (T(G))^\perp$. The operator $V = T$ on G is called the isometric part of T , the operator $S = T$ on G^\perp the anisometric part. The operator T has bounded inverse if and only if S has this property. In the set of all complex ζ such that ζ^{-1} is a regular point for the operator T the author defines the characteristic function of T as $w(T, \zeta) = (T - \zeta I)(I - \zeta T^*)^{-1}$, this operator has the domain G^\perp . V being an isometric operator on a subspace $G \subset H$, the operator T is called the isometric extension of V if V is equal to the isometric part of T on G . The characteristic function for V is then defined as $w(\zeta) = -w(T_0, \zeta)$ where T_0 is an (unique) isometric extension of V of norm 1. The principal results are following. If $w(T, \zeta)$ exists, then $w(T, \zeta) = [S - w(\zeta)] \cdot [e - S^* w(\zeta)]^{-1}$ where e denotes the identic operator restricted to G^\perp . The value ζ_0 ($|\zeta_0| < 1$) is regular for T if and only if the operator $w(\zeta_0) - S$ has bounded inverse. There are established also conditions for regularity in the case $|\zeta| > 1$. Now let V have equal deficiency indices and therefore have an unitary extension U . Let $w_D(\zeta)$ be the operator $U^{-1}w(\zeta)$ where $D = G^\perp$. The value ζ with $|\zeta| < 1$ is called of regular type for V if $\|Vx - \zeta x\| \geq k\|x\|$ in G with $k > 0$. If $w_D(\zeta)$ is regular and unitary on an arc of the circle $|\zeta| = 1$ then (a) this arc consists of values of regular type for V , (b) for every ζ_0 in this arc there exists an unitary extension of V for which ζ_0 is a regular value. If ζ_0 is a value of regular type for V , then $w_D(\zeta)$ is regular and unitary on some arc of the unit circle containing ζ_0 . This was proved by Livšic in the case when V has finite deficiency indices. The proofs are sketched. *A. Alexiewicz.*

Charazov, D. F.: Über eine Klasse linearer Gleichungen in Hilbertschen Räumen. Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 13, 65—72 (1952) [Russisch].

Es werden Gleichungen $u - T_\lambda u = f$ im Hilbertraum betrachtet. Dabei sei T_λ ein linearer Operator, der in einem Gebiet A der λ -Ebene analytisch von dem Parameter λ abhängt; f sei ein gegebenes Element des Hilbertraumes. Gezeigt wird, daß $(E - T_\lambda)^{-1}$ in allen Punkten von A mit Ausnahme einer Menge ohne Häufungspunkt in A oder in keinem Punkte von A existiert. Wenn es ein $\lambda_0 \in A$ gibt, so daß T_{λ_0} der annullierende Operator ist, so liegt der erste Fall vor. Diese Sätze gelten auch, wenn T_λ in bestimmtem Sinne meromorph in λ ist. Die Ergebnisse enthalten als Spezialfälle die Sätze von Tamarkin über Fredholmsche Integralgleichungen, deren Kerne analytisch im Parameter sind, vgl. Ann. of Math., II. Ser. 28, 127—152 (1927). *W. Thimm.*

Leray, Jean: La théorie des points fixes et ses applications en analyse. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 202—208 (1952).

The purpose of this address is to give a short summary of the theory of equations of the form $x = \Phi(x)$ where x is an element of a vector space with convex neighbourhoods and Φ a completely continuous transformation of this space into itself (Leray-Schauder, this Zbl. 9, 73). After having mentioned the most important investigations made on this subject before or after him, Leray defines the topological degree of the transformation $\Phi(x) = x - \varphi(x)$ and states its main properties. In the case of an isolated set F of fixed points of φ , the degree of Φ defines the index $i(F)$. If F is contained in an open set G whose boundary G' contains no fixed point, $i(F)$ depends only on the restriction of φ to G' . A few remarkable applications of the theory are pointed out. Finally a question which remains still open is mentioned: the theory of the Lefschetz number may be deduced from the author's theory of equations [more elaborately explained in J. Math. pures appl., IX. Sér. 24, 201—248 (1945)] but not in its generality. It would be an important development of the theory to extend it to all compact spaces. *C. Racine.*

Inaba, Mituo: A theorem on fixed points and its application to the theory of differential equations. Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, 13—16 (1952).

This paper studies the case of the classical fixed point theorem when the mapping of a convex, compact subset of a Banach space into itself depends on a parameter. It is established (by a reasoning which might certainly be simplified) that the set of the fixed points is a continuum. An interesting application is made to a system of differential equations. It is shown that the solutions are continuous functions of the initial conditions.

C. Racine.

Massera, J. L.: Die bedingte Stabilität von Homöomorphismen. Fac. Ing. Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadist. 2, 108 S. (1952) [Spanisch].

On établit l'existence des ensembles de stabilité et d'instabilité pour quelques classes d'homéomorphismes T qui laissent invariante l'origine dans un espace de Banach Z , produit topologique de deux autres espaces de Banach X, Y . L'ensemble $E \subset Z$ est appelé ensemble de stabilité pour T si les opérateurs T^n ($n \geq 0$) sont continus sur E dans 0 uniformément par rapport à n ; J est ensemble d'instabilité s'il est ensemble de stabilité pour T^{-1} . L'existence d'un ensemble de stabilité asymptotique est assurée, par exemple, dans les conditions suivantes: 1) T a une différentielle de Fréchet N dans 0; 2. N est le produit cartésien de deux transformations L et M (resp. dans X et Y), telles que $\|Lx\| \leq \lambda \|x\|$, $\|My\| \geq \mu \|y\|$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda < \mu$; 3. $\dim Y < \infty$. — Diverses propriétés, rencontrées dans la théorie des équations différentielles sont établies dans ce cadre général.

G. Marinescu.

Straus, A. V.: Über die charakteristischen Eigenschaften verallgemeinerter Resolventen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 209—212 (1952) [Russisch].

On donne des résultats caractérisant les familles d'opérateurs R_λ qui sont des résolvantes généralisées des opérateurs symétriques [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 78, 217—220 (1951)]. — I. R_λ ($\operatorname{Im} \lambda \neq 0$) est une résolvante généralisée si et seulement si: (1) pour tout λ_0 il existe un sous-espace $X \subset H$ tel que $\overline{R_{\lambda_0} X} = H$; (2) $R_\lambda x - R_{\lambda_0} x = (\lambda - \lambda_0) \cdot R_\lambda R_{\lambda_0} x$ ($x \in X$); (3) $y \perp (E - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}) X$ implique $\|R_\lambda y\|^2 \leq (1/\operatorname{Im} \lambda) \operatorname{Im} \langle R_\lambda y, y \rangle$; (4) $x = 0$ si $R_\lambda x = 0$, (5) $R_\lambda^* = R_\lambda$, (6) R_λ est une fonction régulière. — II. R_λ est la résolvante généralisée d'un opérateur symétrique maximal si et seulement si les conditions (4), (5), (6) sont vérifiées et si $R_\lambda - R_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}$.

G. Marinescu.

Vajnberg, M. M.: Über die festen Richtungen des Produktes gewisser Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 261—263 (1952) [Russisch].

On applique la méthode variationnelle aux opérateurs de la forme BF , où B est autoadjoint et complètement continu et F est la dérivée d'une fonctionnelle (dans un espace réel de Hilbert, H). Si F est borné dans une sphère, $\langle F(x), x \rangle \geq \alpha \langle x, x \rangle^r$, $\alpha > 0$, $r > 0$, et si B admet un nombre fini de valeurs propres > 0 et un nombre quelconque de valeurs propres négatives, alors BF admet un ensemble W au moins dénombrable d'éléments propres, dont on peut extraire une suite croissant vers ∞ et une suite décroissant vers 0 (en norme). Si $F(-x) = -F(x)$ et $\langle F(x), x \rangle > 0$ ($x \neq 0$), l'équation $\mu x = BF(x)$ admet pour tout $c > 0$ un ensemble au moins dénombrable d'éléments propres linéairement indépendantes de

la forme $\psi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k^{(i)}}{\sqrt{|\lambda_k|}} x_k$, $(\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}, \dots) \in l_2$, $\|\eta^{(i)}\| = c$, x_k, λ_k éléments et valeurs propres de B . D'autres précisions sont obtenus dans des conditions plus restrictives.

G. Marinescu.

Glazman, I. M.: Über den Charakter des Spektrums mehrdimensionaler singulärer Randwertaufgaben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 171—174 (1952) [Russisch].

This note extends to certain several-dimensional differential operators the considerations of a previous note (this Zbl. 48, 96) dealing with the one-dimensional case. Consider the diffe-

rentiel operator $I[u] = -\Delta u + q(P)u$, $q(P)$ being a continuous point-function defined throughout Euclidan space E^n . In $\mathfrak{L}_2(E^n)$, one defines the operator L as the closure of the operator L' generated by l on the linear subspace of all twice continuously differentiable functions vanishing outside of compact sets. If $\text{def}(L) \neq 0$, then L admits more than one self-adjoint extension \tilde{L} , and if $\text{def}(L) = \infty$, the continuous spectrum $C(\tilde{L})$ may depend upon \tilde{L} . Let $C(L)$ be the intersection of all of the sets $C(\tilde{L})$ for \tilde{L} as defined above. A number of theorems dealing with $C(L)$ are obtained, of which the following is typical. Let Ω be an open set in E^n which contains spheres of arbitrarily large radius. For $\lambda > 0$, let M_λ be the set of all $P \in \Omega$ such that $|q(P)| > \lambda$. If $\int_{M_\lambda} |q(P)|^2 dP < \infty$ for all $\lambda > 0$, then $[0, \infty) \subset C(L)$. Proofs are sketched.

E. Hewitt.

Halmos, Paul R.: Spectra and spectral manifolds. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 43—49 (1952).

Soient A un opérateur normal d'un espace de Hilbert H , I un sous-espace de H invariant par A , B la restriction de A à I , $S(I)$ le spectre de B . Si $I \subset I'$, en général les ensembles $S(I)$ et $S(I')$ ne sont pas comparables; l'A. démontre que si I et I' „réduisent“ A (c'est-à-dire, sont invariants et ont des supplémentaires orthogonaux invariants) alors $I \subset I'$ entraîne $S(I) \subset S(I')$; de plus, si R représente l'intersection de tous les sous-espaces qui réduisent A et contiennent le sous-espace invariant I , alors $S(R) \subset S(I)$. De ces résultats, l'A. donne l'application suivante: soit $E(M)$ une mesure spectrale, définie pour chaque borélien M du plan complexe C , telle que $A = \int_C \lambda dE(\lambda)$; soit $\mathcal{L}(M)$ la projection de H par $E(M)$; alors pour tout borélien M , $\mathcal{L}(M)$ est le sous-espace engendré par l'ensemble des sous-espaces invariants I tels que $S(I) \subset M$.

A. Pereira Gomes.

Rellich, Franz: Störungstheorie der Spektralzerlegung. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 606—613 (1952).

Eine Schilderung der in den Jahren 1936—1950 gewonnenen Resultate zur Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren im Hilbertschen Raum (insbes. F. Rellich, B. v. Sz. Nagy, F. Kriedrichs, T. Kato).

F. W. Schäfke.

Hille, Einar: A note on Cauchy's problem. Ann. Soc. Polon. Math. 25 (dédié à H. Steinhaus) 56—68 (1952).

Let U be a closed linear operator defined on a dense subspace $D(U)$ of a complex Banach space Y to Y , and consider the equation (1) $y'(t) = \text{strong} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(y(t+h) - y(t)) = U(y(t))$, $t > 0$. The author discusses Cauchy's problem for (1): Given $y_0 \in Y$, find a function $y(t)$ on $(0, \infty)$ to Y such that (i) $y(t)$ and $y'(t)$ are in Y for $t > 0$, (ii) $y(t)$ satisfies (1) for $t > 0$, (iii) $\text{strong} \lim_{t \downarrow 0} y(t) = y_0$. By virtue of the semi-group theory (Hille, Functional analysis and semi-groups, New York 1948, this Zbl. 33, 65; K. Yosida, this Zbl. 37, 353), the uniqueness and the solvability theorems of such Cauchy's problem are obtained. Uniqueness: Let the resolvent $R(\lambda, U) = (\lambda I - U)^{-1}$ exists for $\lambda > \lambda_0 \geq 0$ such that $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \|R(\lambda, U)\| < \infty$. Then for any $y_0 \in Y$, the C. P. has at most one solution satisfying $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|y(t)\| < \infty$.

Solvability: If U is the infinitesimal generator of a semi-group $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, satisfying $\text{strong} \lim_{t \downarrow 0} T(t)y = y$ for $y \in Y$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|T(t)\| = \omega < \infty$, then the C. P. is uniquely solvable for $y_0 \in D(U)$ in such a way that $\|y(t)\| \leq M \|y_0\| \exp(\omega t)$ with a constant M . These results are illustrated by concrete examples pertaining to the typical equations $\partial^2 y / \partial t^2 = \partial^2 y / \partial x^2$, $\partial^2 y / \partial t^2 = -\partial^2 y / \partial x^2$ and $\partial y / \partial t = \partial^2 y / \partial x^2$.

K. Yosida.

Feller, W.: On positivity preserving semigroups of transformations on $C[r_1, r_2]$. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus 85—94 (1952).

Let $\{T_t\}$, $0 < t < \infty$, be a semi-group of bounded linear operators T_t on the Banach space $C = C(r_1, r_2)$ into C such that

$$T_t T_s = T_{t+s}, \quad \|T_t\| \leq 1, \quad \text{strong} \lim_{t \rightarrow t_0} T_t f = T_{t_0} f \quad (t_0 > 0).$$

Moreover $\{T_t\}$ is assumed to satisfy the condition: $f \geq 0$ implies $T_t f \geq 0$ for any $t > 0$. By the semi-group theory (E. Hille and the reviewer), $\{T_t\}$ is determined by its infinitesimal gene-

rator A defined only on a set $D \subseteq C$ consisting of those $f \in C$ for which $Af - \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)f$ exists. The author gives the concrete form of the operator A under the following two conditions: (i) For each $s_0 \in (r_1, r_2)$ and any $f(s) \in C$ which vanishes in some interval of s_0 one has $\lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)f(s)|_{s=s_0} = 0$. (ii) For each $f \in D$ and each $s \in (r_1, r_2)$, $f'(s)$ and $f''(s)$ exist.

The result is that there exist three functions $a(s) \geq 0$, $b(s)$ and $c(s) \leq 0$ such that for any $f \in D$ and at every „regular point s “ we have

$$Af(s) = a(s)f''(s) + b(s)f'(s) + c(s)f(s).$$

Here the point s is called „regular“ if for any three real numbers p_0, p_1 , and p_2 it is possible to find a $f \in D$ such that $f^{(k)}(s) = p_k$ ($k = 0, 1, 2$). This result is applied to derive, under a fairly general hypothesis and in every elegant way, the Fokker-Planck's equation $\partial/\partial t = a(x)\partial^2/\partial x^2 + b(x)\partial/\partial x$ for the temporally homogeneous stochastic process satisfying the so-called Lindeberg condition. The latter condition implies (i) for the corresponding semi-group. The author stresses that the existence of the transition density $p(t, x, y)$ for the process is not needed in his derivation.

K. Yosida.

Stein, Marvin L.: Sufficient conditions for the convergence of Newton's method in complex Banach spaces. Proc. Amer. math. Soc. 3, 858—863 (1952).

Let X be a Banach space, $T(x)$ an operator from X to another such space Y . The Newton's method for solving the equation $T(x) = 0$ consists in choosing an appropriate first approximation x_0 and then defining consecutive ones by formula $x_{i+1} = x_i - \delta T^{-1}(x_i; T(x_i))$ where $\delta T^{-1}(x, h)$ stands for the inverse with respect to h of the first variation $\delta T(x; h)$. Under some circumstances the sequence x_i may converge to the solution. In the case of real Banach spaces the problem of applicability of this method was investigated by Kantorovič and his school. The author gives sufficient conditions for convergence of the sequence x_i to the solution of the equation $T(x) = 0$ in the case of a complex Banach space. The conditions are (1) $T(x)$ is G -differentiable (in the sense of Hille) in some neighbourhood D of 0, (2) $x_0 \in D$ and in a neighbourhood $\|x - x_0\| < a$ $T(x)$ does not exceed a sufficiently small constant, (3) $\delta T(x_0; h)$ maps in one-to-one fashion X into Y .

A. Alexiewicz.

Aczél, János: Über einige Funktionalgleichungen der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 565—568, russische und deutsche Zusammenfassgn. 568, 569 (1952) [Ungarisch].

Verf. interpretiert seine früheren Ergebnisse über Funktionalgleichungen mehrerer Veränderlichen vom Standpunkte der Theorie der kontinuierlichen Gruppen einer Veränderlichen aus. Es wird bewiesen, daß die einzige stetige und monotone Lösung der Funktionalgleichung (*) $f[f(x, u), v] = f(x, g(u, v))$ durch Funktionen von der folgenden Gestalt geliefert werden:

$$g(u, v) = G^{-1}[G(u) + G(v)]; \quad f(x, u) = F^{-1}[F(x) + G(u)]$$

(F und G bedeuten beliebige stetige und monotone Funktionen). Die in der vorliegenden Arbeit behandelten Spezialfälle der Gleichung (*) sind folgende: a) $g[g(u, v), w] = g[u, g(v, w)]$. Die allgemeine streng monotone und stetige Lösung dieser Gleichung hat folgende Gestalt: $g(u, v) = G^{-1}[G(u) + G(v)]$. — b) $f[f(x, u), v] = f[x, u + v]$, die allgemeine streng monotone und stetige Lösung dieser Gleichung ist: $f(x, u) = F^{-1}[F(x) + u]$. — Diese Tatsachen wurden in früheren Arbeiten des Verf. behandelt. Die Lösung a) sichert die Isomorphie jeder eingliedrigen streng monotonen kontinuierlichen Halbgruppe mit einer Additions-Halbgruppe der reellen Zahlen. — Die obigen Ergebnisse bedeuten, daß sich in jede streng monotone einparametrische Transformationschar einer Veränderlichen ein additives Parameter einführen läßt und daß eine solche Transformationschar durch eine Transformation der Veränderlichen in die Translationschar übergeführt werden kann.

St. Fenyő.

Praktische Analysis:

● Hildebrand, F. B.: Methods of applied mathematics. New York: Prentice Hall 1952. XI, 523 p. \$ 7,75.

● Semendiaev, K. A.: The determination of latent roots and invariant manifolds of matrices by means of iterations. (National Bureau of Standards, Report 1402.) Washington: Department of Commerce 1952. XXII, 629 p. \$ 10,00.

● Massau, Junius: Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. Mons: G. Delporte 1952.

Rosenbloom, P. C.: The difference equation method for solving the Dirichlet problem. Construct. Appl. conformal maps 231—237 (1952).

The author gives a new explicite formula for the solution of the difference equation

(i) $u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 4h^2 \rho(x, y)$ which corresponds to the Poisson equation $\Delta u(x, y) = \rho(x, y)$. This formula is simpler than those given by other authors and can be used for practical computations. Let $0 \leq x \leq N$, $0 \leq y \leq M+1$ be a given rectangle and put $h=1$. Let B be the matrix (a_{ik}) , $a_{i, i+1} = a_{i+1, i} = 1$, $i = 1, 2, \dots, M-1$, the remaining elements equal 0, and put $A = 4I - B$. Then the equation (i) takes the form (ii) $\alpha_{k+1} = A \alpha_k - \alpha_{k-1} + \delta_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, where α_k is the matrix $[u(k, 1), \dots, u(k, M)]$ and

$\delta_k = [-u(k, 0) + 4\rho(k, 1), 4\rho(k, 2), \dots, 4\rho(k, M-1), -4u(k, M+1) + 4\rho(k, M)]$.

Using the standard methods of solving of the scalar difference equations the author solves equation (ii) in a short and elegant manner. This method can be applied to more complicated domains. There is also given a new global estimate for the error of the approximate solution of (i). J. Gorski.

Garwick, Jan V.: On the numerical solution of integral equations. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 113—121 (1952).

Verf. führt zwei numerische Methoden vor, die gestatten, Fredholmsche Integralgleichungen erster oder zweiter Art näherungsweise zu lösen und Näherungswerte der Eigenwerte zu gewinnen. Beim ersten Verfahren, das sich für Integralgleichungen mit regulärem Kern eignet, wird die

Approximation dadurch erreicht, daß das Integral $\int_{-1}^{+1} K(\xi, \eta) F(\eta) d\eta$ unter Verwendung der Gaußschen Quadraturformel angenähert wird, wodurch die Integralgleichung in ein System von linearen Gleichungen übergeht. Beim zweiten Verfahren wird der Kern durch einen ausgearteten angenähert, indem die in der Integralgleichung auftretenden Funktionen sowie der Kern selbst durch Entwicklungen nach den Funktionen eines vollständigen orthogonalen Funktionensystems dargestellt werden. Die Koeffizienten der nach dem Funktionensystem entwickelten Lösung können, wenn als Näherungen Teilsummen der Entwicklung genommen werden, aus einem linearen Gleichungssystem ermittelt werden. Die letzte Methode ist auch in solchen Fällen brauchbar, in denen der Kern Singularitäten besitzt. Verf. legt dies im einzelnen für die beiden singulären Kerne

$K(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) \ln |\eta - \varphi(\xi)| + B(\xi, \eta)$, $K(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) |\eta - \varphi(\xi)|^{\alpha-1} + B(\xi, \eta)$, $0 < \alpha < 1$, dar. W. Quade.

Suyama, Yukio und Kanzi Nakamori: Über die numerische Lösung der Integralgleichungen vom Volterraschen Typus. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., Ser. A 6. 121—129 (1952) [Esperanto].

Es wird ein Verfahren von T. Sato, welches mit drei Näherungsschritten arbeitet, zur numerischen Lösung nicht linearer Volterrascher Integralgleichungen $u(x) =$

$f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t)) dt$ auf vier Schritte ausgedehnt. Das Verfahren zeigt Verwandtschaft mit dem bekannten Runge-Kutta-Verfahren für Differentialgleichungen. S. 121, 2. Z. v. u. fehlt $u'(x)$. L. Schmetterer.

Bertiau, F.: Neue numerische Integrationsmethoden. Simon Stevin 29, 196—202 (1952) [Holländisch].

Verf. behandelt zuerst die Integration mit Hilfe der Funktionswerte an äquidistanten Abszissen des Integranden mit endlich bleibender Ableitung im Integrationsintervall. Weiter behandelt er den Fall, wo die Ableitung des Integranden unendlich wird an einer der Grenzen des Integrationsintervalles. Er versucht dann die Funktionswerte genügend genau zu approximieren mittels einer ganzen rationalen Funktion von $\sqrt{x+c}$. E. M. Bruins.

Georgiev, G.: Formeln der mechanischen Quadratur mit minimaler Gliederanzahl bei mehrfachen Integralen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 521—524 (1952) [Russisch].

Besprechung in dies. Zbl. 51, 97.

● **Kiessler, Fritz: Angewandte Nomographie.** — Teil 1, 2. Essen: Verlag W. Girardet 1952. 135, 176 S. mit 128, 151 Abb.; DM 18,00, 19,80.

Den Meistern der Nomographie, R. Soreau und H. Schwerdt, widmet der Verf. diese gehaltvollen zwei Bändchen, in denen eine Fülle praktischer Verfahren und technischer Beispiele mit großer Ausführlichkeit für Ingenieure bearbeitet werden.

F. Rehbock.

Freudenthal, H.: Integratoren. Simon Stevin 29, 177—184 (1952) [Holländisch].

● **Review of Electronic Digital Computers, joint AIEE-IRE Computer Conference.** (Papers and discussions presented at the joint AIEE-IRE computer conference, Philadelphia, Dec. 10—12, 1951.) New York: American Institute of Electrical Engineers 1952. 114 p. \$ 3,50.

Das Buch stellt das Protokoll der „Joint AIEE-IRE Computer Conference“ dar, einer Tagung, welche sich mit den konstruktiven und betrieblichen Gesichtspunkten programmgesteuerter Rechenmaschinen befaßte. In 19 Vorträgen sind 11 Maschinen behandelt, und zwar ausschließlich solche, die sich im praktischen Betrieb bereits bewährt haben. Zu jeder Maschine ist zunächst eine summarische Beschreibung mit einigen Bildern gegeben; darauf folgen ausführliche Angaben in bezug auf Betriebssicherheit, Fehlerquellen, sowie deren Behebung. Solche Angaben sind hier erstmals veröffentlicht und sind für den Praktiker von allergrößtem Wert. — Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt (vgl. z. B. 47, 119, 370, 371; 48, 104, 105).

Ambros P. Seiser.

● **Synthesis of electronic computing and control circuits.** (The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, vol. 27.) Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1952. VIII, 278 S. \$ 8,00.

Dieser Band berichtet über die bei der Entwicklung des funktionellen Aufbaus des Rechenautomaten Mark III gewonnenen Erkenntnisse und Erfahrungen. Die ersten Kapitel handeln von logischen Einzelschaltungen, d. h. von Schaltkreisen, deren Eingangs- und Ausgangsspannungen nur je zwei diskrete Werte annehmen können. Das Hauptproblem ist die Ermittlung von Schaltungen, die mit einem minimalen Aufwand an Elektronenröhren den vorgegebenen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsspannungen realisieren. Es wird keine allgemeine Lösung hierfür gegeben, wohl aber eine Übersicht praktisch brauchbarer Methoden. Insbesondere werden für sämtliche einwertigen Funktionen von maximal vier Variablen Schaltungen angegeben, die vermutlich die einfachsten sind, sowie Tabellen, welche die Konstruktion von Schaltungen bis zu sechs Eingangsvariablen erleichtern. Die Verwendung von Gleichrichtern als Schaltelementen an Stelle von Röhren wird ebenfalls diskutiert. Die übrigen Kapitel behandeln spezielle Schaltungen und Probleme wie Pyramiden und Matrizen, die dualen Verschlüsselungen von Dezimalziffern, Schaltungen mit interner Rückkopplung (Flip-Flops und Ringe), Zähler, Additions- und Multiplikationsschaltungen im Dual- und Dezimalsystem, sowie Multiplikationsmethoden im allgemeinen. Die ausführliche Behandlung des Stoffes und die zahlreichen Beispiele zeigen, daß das Buch vor allem für die Praxis gedacht ist. Dies mag auch der Grund sein, warum an Stelle der Booleschen Algebra eine elementare, aber oft unübersichtlichere Bezeichnung verwendet wird. Natürlich wäre es von größtem theoretischem und praktischem Interesse, wenn es gelänge, logische Schaltungen aus einem allgemein gültigen Formalismus zu gewinnen. Vorläufig ist man jedoch auf empirische Methoden angewiesen, wozu dieses Buch als Einführung und Handbuch gute Dienste leisten wird.

J. R. Stock.

Goodell, John D.: The foundations of computing machinery. J. Comput. Systems 1, 1—13 (1952).

Lode, Tenny: The realization of a universal decision element. J. Comput. Systems 1, 14—22 (1952).

● **Korn, G. A. and T. M. Korn: Electronic analog computers. (D-c analog computers).** New York: McGraw-Hill Book Company 1952, XV, 378 p. 52 s 6d.

Das Buch vermittelt eine gründliche Übersicht über elektronische Integrieranlagen. Die Bauelemente solcher Anlagen sind: Addierende Verstärker, Multiplikatoren, Integratoren, Funktionsgeber. Die mathematischen Variablen werden durch elektrische Spannungen, gelegentlich auch durch Drehwinkel, dargestellt. Das Werk wendet sich in erster Linie an die Benutzer der Integrieranlagen; für den Erbauer ist nichts wesentlich Neues gegeben. Die Vorbe-

reitung gegebener Differentialgleichungen für die Lösung auf einer Integrieranlage ist ausführlich und klar behandelt. Diese Arbeit besteht hauptsächlich in einer Transformation der Variablen, um die beschränkten Bereiche der elektrischen Schaltung vollständig auszunützen. Zahlreiche Beispiele erläutern diesen Vorgang. Weiterhin sind technische Beschreibungen über den Aufbau der elektrischen Einheiten gegeben, wobei die verschiedenen heute gebräuchlichen Verfahren angegeben sind. Man vermißt hier eine didaktische Gliederung dieser Kapitel, indem nebeneinander überaus elementare Tatsachen und komplizierte Zusammenhänge dargelegt sind. Ferner wäre eine Übersicht über die heute im Gebrauch befindlichen optischen Kurvenabtaster wünschenswert. — Gewisse Hilfseinrichtungen, wie z. B. diejenigen zur Darstellung von Sättigung, Spiel und trockener Reibung in physikalischen Systemen sind beschrieben; ferner findet sich eine Übersicht über eine Anzahl heute bestehender Integrieranlagen. Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis erleichtert den Zugang zur Spezialliteratur. *Ambros. Speiser.*

Fritz, N. L.: Analog computers for coordinate transformation. *Rev. Sci. Instruments* **23**, 667—671 (1952).

Loopstra, B. J.: Sinnreiche Synthese von Rechenstromkreisen. *Math. Centrum Amsterdam, Rapport W 1952—010*, 7 S. (1952) [Holländisch].

Eine Betrachtung der Frage nach der Konstruktion einer Rechenanlage mit möglichst wenig Elementen, in der der Verf. sich vorwiegend beschränkt auf eine Diskussion der Resultate von Aiken und an Hand einiger einfacher Beispiele zeigt, wieweit man noch von der Lösung des Problems entfernt ist. *E. M. Bruins.*

Puig Adam, P.: Die graphische und die algebraische Methode zum Entwerfen von elektronischen Rechenschaltungen. *Revista Ci. apl.* Nr. **27**, 289—302 (1952) [Spanisch].

Verf. diskutiert die fundamentalen Fragen bei der einfachsten Darstellung von Funktionen von einer, zwei, drei und vier binären Variablen sehr ausführlich. Er benutzt zur geometrischen Erläuterung die „weiß“ oder schwarz“ zu färbenden Ecken des Maßpolytopes; für mehr als vier Variablen gibt er die grundlegenden algebraischen Beziehungen nochmals an. *E. M. Bruins.*

Scholten, C. E.: Ein- oder Mehr-Adressenkode in Rechenmaschinen? *Math. Centrum Amsterdam, Rapport ZW 1952—023*, 11 S. (1952) [Holländisch].

Verf. diskutiert in äußerst knapper Fassung die Vor- und Nachteile der sogenannten 1, 1 + 1, 2, 2 + 1, und 3 Adressenkode in Rechenmaschinen und vergleicht die Wirkung bei der Quadratwurzelziehung. *E. M. Bruins.*

Girlich, Albert A.: Test pulse generator for digital computers. *Electronics* **25**, 158—160 (1952).

Placker, L. and W. J. Wray jr.: „Germanium photo-diodes read computer tapes“. *Electronics* **25**, 150—151 (1952).

Koppel, Herbert: Digital computer plays nim. *Electronics* **25**, 155—157 (1952).

Freudenthal, Hans: Eine servo-statistische Betrachtung. *Nederl. Akad. Wet., Verslag Afd. Natuurk.* **61**, 130—132 (1952) [Holländisch].

Verf. bemerkt, daß, falls man zur Stabilisierung eines Verstärkungsmechanismus das Rückkopplungsprinzip anwendet, für sehr große Verstärkungsfaktoren die tatsächlich eintretende Verstärkung nur vom Rückkopplungsfaktor bestimmt wird. Er diskutiert genauer, was man zu erwarten hätte, falls die zu eliminierenden Schwankungen statistisch verteilt sind, und schließt mit der Bemerkung, daß es leider noch keine numerischen Daten gibt, um seine Betrachtungsweise zu verifizieren. *E. M. Bruins.*

● **Bickley, W. G., L. J. Comrie, J. C. P. Miller, D. H. Sadler and A. J. Thompson:** Bessel functions. Part II. Functions of positive integer order. (*Mathematical Tables*, Vol. X.) London: Cambridge University Press 1952. XL 255 p. 60 s. net.

(Teil I, dies. Zbl. **17**, 415.) Inhalt: Tafeln I bis IV: $J_n(x)$ für $n = 2(1)12$, $x = 0(0,01)10(0,1)25$ und $n = 13(1)20$, $x = 0(0,01)5(0,1)25$ mit 8 D.; $x^n Y_n(x)$ bzw. $Y_n(x)$ für $n = 2(1)11$, $x = 0(0,01)10(0,1)25$ und $n = 12(1)20$, $x = 0(0,1)25$ mit 8 Z.; $x^{-n} I_n(x)$ bzw. $e^{-x} I_n(x)$ und $x^n K_n(x)$ bzw. $e^x K_n(x)$ für $n = 2(1)11$, $x = 0(0,01)5(0,1)20$ und $n = 12(1)20$, $x = 0(0,1)20$ mit 8 Z. (Die Tafeln ent-

halten zweite gewöhnliche oder modifizierte Differenzen, mit denen nach Bessel bzw. Everett interpoliert werden kann.) Ohne einfache Interpolationsvorschrift sind die Tabellen V bis VIII: $J_n(x)$ für $n = 0(1)20$, $x = 0(0,1)25$ mit 10 D., $Y_n(x)$ für $n = 0(1)20$, $x = 0,1(0,1)25$ mit 10 Z., $I_n(x)$ für $n = 0(1)20$, $x = 0(0,1)20$ mit 10 Z., $K_n(x)$ für $n = 0(1)20$, $x = 0,1(0,1)20$ mit 10 Z. Einleitend wird nach einer genauen Tafelbeschreibung eine ausführliche Formelzusammenstellung gebracht.

H. Unger.

● **Table No. 82 of factors for 5-place roots.** Oakland, Cal.: Marchant Calculators, Inc. 1952. 2 p.

● **Table No. 81 of factors for 6-place roots.** Oakland, Cal.: Marchant Calculators, Inc. 1952. 4 p.

● **Fröberg, Carl-Erik: Hexadecimal conversion tables.** Lund: CWK Gleerup 1952, 20 S.

Hilfstabellen zur Übersetzung vom Dezimalsystem ins Dualsystem (wobei zur Erhöhung der Übersichtlichkeit immer 4 Dualziffern zu einer Hexadezimalziffer zusammengefaßt sind) und umgekehrt. Die Tabelle gibt die Hexadezimaldarstellung der Zahlen $x = 0(16)16^3$; $0(10^{-2})1$; $0(10^{-4})10^{-2}$; ... usw. bis $x = 0(10^{-16})10^{-14}$ mit 13 Hexadezimalziffern nach dem Komma. Ferner die Hexadezimaldarstellung für einige Konstanten und schließlich die Dezimalbrüche für die Zahlen $x = 0(16^{-1})1$; $0(16^{-2})16^{-1}$; ... usw. bis $x = 0(16^{-13})16^{-12}$ mit 15 Stellen nach dem Komma.

H. Rutishauser.

● **Dengler, M. A., M. Goland and Y. L. Luke: Tables of the functions**

$\int_0^y (e^{iu} - 1) \sqrt{u^2 + b^2} du/u$. Midwest Research Institute, Report August 1952. 19 p.

Wijngaarden, A. van: Table of the integral $\int_0^1 \exp(-v^{-2} - xv) v^{-p} dv$. Math. Centrum Amsterdam, Rapport R 176, 6 p. (1952).

Kaarsemaker, L. and A. van Wijngaarden: Tables for use in rank correlation. Math. Centrum Amsterdam, Rapport R 73, 17 p. (1952).

● **Smith jr., Robert W., Helen E. Edwards and Stuart R. Brinkley jr.: Tables of velocity of steady laminar flow in channels of rectangular cross section.** (Report of Investigations 4885.) U. S. Dept. of the Interior, Bureau of Mines, 1952. 41 p.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Karhunen, K.: Lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** (Monografías de Ciencia Moderna n.º 36. Estadística n.º 3.) Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas 1952. 86 p. 30 ptas. [Spanisch].

Wiener, Norbert: Comprehensive view of prediction theory. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 308—321 (1952).

A comprehensive presentation and discussion of linear prediction theory, including particularly a sketch of the multiple case. Prediction is treated in terms of linear operators on frequency rather than time scale.

G. Elfving.

● **McKinsey, J. C. C.: Introduction to the theory of games.** London: McGraw-Hill 1952. X, 371 p. \$ 6,50.

Ulam, S.: Random processes and transformations. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 264—275 (1952).

The author discusses, with many illustrative examples, the Monte Carlo method of solving problems of mathematical physics, viz. the method of solving mathematical problems by playing the corresponding games or random processes. The paper is written expository and the bibliography includes those interesting papers hitherto unknown to the reviewer.

K. Yosida.

Doob, J. L.: The measure-theoretic setting of probability theory. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 199—209 (1952).

Trotz der allgemeinen Anerkennung, daß die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie einfach die Maßtheorie mit spezieller Betonung von gewissen Aspekten dieser Theorie ist, gibt es bis jetzt nach Verf. keine vollständig befriedigende maßtheoretische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Verf. berichtet in der vorliegenden Arbeit über eine maßtheoretische Begründung dieser Theorie, die er als Grundlage seines Buches über stochastische Prozesse, das er zur Publikation bereit hat, anwendet. Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich nach Verf. mit Wahrscheinlichkeitsfeldern (Ω, G, Pr) , wobei Ω ein Grundraum von elementaren Ereignissen, G ein Borelscher Körper (σ -Körper) von Teilmengen (genannt Ereignisse) der Grundmenge und Pr ein Maß (Wahrscheinlichkeit) mit $\text{Pr}(\Omega) = 1$. Die G -meßbaren Funktionen $x(\omega)$ bilden die Zufallsvariablen. Es sei R_x der Wertbereich einer Zufallsvariablen und A eine Borelsche lineare Menge mit $A \subset R_x$, dann wird der Menge A durch $\text{Pr}^*(A) = \int_A dF(\lambda)$, wobei $F(\lambda) = \text{Pr}\{x(\omega) \leq \lambda\}$, eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Bedeutet

$A \in G$ die Urbildmenge von A bei der Abbildung $\omega \rightarrow x(\omega)$, so bezeichnen Gnedenko und Kolmogorov (Grenzverteilungen von Summen aus unabhängigen Zufallsvariablen, Moskau 1949, russisch) das Feld (Ω, G, Pr) als perfekt, wenn für jede Zufallsvariable x und jedes $A \in R_x$ gilt: $\text{Pr}(A) = \inf_{A \subset B} \text{Pr}^*(B)$, wobei B Borelsche Mengen, und sie lassen jene Tripel (Ω, G, Pr)

als Wahrscheinlichkeitsfelder gelten, die perfekt sind. Nach Verf. scheint diese Einschränkung unnatürlich und unnötig, und in gewissen Anwendungen bringt sie Verwirrung. Verf. erklärt als einen stochastischen Prozeß eine Familie $\{x_t, t \in T\}$ von Zufallsvariablen, wobei T irgendeine Menge von Indizes t bedeutet. Läßt man $\omega \in \Omega$ fest, so erhält man für jedes $\omega \in \Omega$ durch $x_t, t \in T$, eine Funktion von t , die Verf. als eine Probefunktion (sample function) bezeichnet. Eine wichtige Rolle in der Theorie des Verf. spielen die stochastischen Prozesse, in denen die Probefunktionen die Elemente ω selbst des Grundraumes Ω sind (stochastic process of functions space type). Jeder stochastische Prozeß kann eine Darstellung als stochastischer Prozeß of functions space type erhalten. Es sei F ein Borelscher Unterkörper von G und x eine Zufallsvariable mit $E\{|x|\} < \infty$; hierbei bezeichnet E das G -Integral (mathematische Erwartung). Dann kann man x eine bedingte Erwartung bezüglich \mathfrak{F} , in Zeichen $E\{x|F\}$, zuordnen. Sie ist eine \mathfrak{F}^* -meßbare Funktion, für welche gilt

$$\int_A x d\text{Pr} = \int_A E\{x|F\} d\text{Pr} \quad \text{für jedes } A \in \mathfrak{F}.$$

Hierbei bedeutet \mathfrak{F}^* den kleinsten σ -Körper, der \mathfrak{F} und alle Pr -Nullmengen enthält. Als bedingte Wahrscheinlichkeit $\text{Pr}\{M|F\}$ von $M \in G$ bezüglich \mathfrak{F} wird die bedingte Erwartung bezüglich \mathfrak{F} der charakteristischen Funktion von M erklärt. Eine eindeutige Funktion $p(A, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $A \in G$, heißt eine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich \mathfrak{F} , wenn sie folgende Bedingungen erfüllt: α) $p(A, \omega)$ ist beim festen ω eine Wahrscheinlichkeit auf G . β) für festes A gilt $\text{Pr}(A|\mathfrak{F}) = p(A, \omega)$. — Ist das Feld (Ω, G, Pr) perfekt, so existiert stets eine solche Verteilung. Verf. zeigt nun, das $p(A, \omega)$ auch in anderen für die Anwendungen wichtigen Fällen, wo das Wahrscheinlichkeitsfeld nicht perfekt ist, existiert.

D. A. Kappos.

Nabeya, Seiji: Absolute moments in 3-dimensional normal distribution. Ann. Inst. statist. Math. 4, 15—30 (1952).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 45, 70) hatte Verf. Formeln für die absoluten Momente einer zweidimensionalen Normalverteilung mit verschwindenden Mittelwerten hergeleitet. Die vorliegende Arbeit gibt die Erwartungswerte $E[x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}]$ mit $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$ und $n_1 + n_2 + n_3 \leq 12$ für die dreidimensionale Normalverteilung.

G. Schulz.

Johnson, N. L.: Approximations to the probability integral of the distributions of range. Biometrika 39, 417—419 (1952).

Let x_1, \dots, x_n denote a random sample of size n drawn from a population with cumulative distribution $F(x)$ and denote the range $w = x_{\max} - x_{\min}$, then the probability integral of range is given by the well known formula

$$\text{Pr}\{w \leq W\} = P_n(W) = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x) - F(x - W)]^{n-1} dF(x).$$

By a Taylor expansion the author derives a useful approximation to $P_n(W)$ for small values of W . In the case of a normal population this formula is found to give results in good agreement with the exact values obtained by numerical integration [Pearson and Hartley, Biometrika 32, 301 (1942)].

H. O. Hartley.

Raj, Des: On a generalized Bessel function population. *Ganita* 3, 111—115 (1952).

The population mentioned in the title is defined for non-negative x by

$$f(x)dx = a(ax)^2 \exp[-ga^{-\mu} - \alpha x] \Phi_{\lambda}^{\mu}(g x^{\mu}) dx, \text{ where } \Phi_{\lambda}^{\mu}(t) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{[r! T(1 + \lambda + \mu r)]}.$$

This family contains bell-shaped distributions as well as J -shaped ones. For $g = 0$ and $\mu = 0$ it specialises to Pearson's type III, and the $\mu = 1$ case has been considered by S. S. Bose [*Sankhya* 3, 253—261 (1938)]. The author derives the first four moments and shows that $\beta_2 - \beta_1 \geq 3$. He suggests that the four parameters a, g, λ and μ may be determined by the method of moments and illustrates this by an example.

S. Vajda.

Gayen, A. K.: The inverse hyperbolic sine transformation on Student's t for non-normal samples. *Sankhyā* 12, 105—108 (1952).

Für normale Ausgangsgesamtheit (Population) wird die Student-Verteilung des auf Grund einer $(n + 1)$ -gliedrigen Stichprobe gebildeten Quotienten t nach F. J. Anscombe [*J. roy. statist. Soc., Ser. A* 113, 228—229 (1950)] durch die Transformation $y = \pm \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \sqrt{3t^2/2n}$ für $n \rightarrow \infty$ asymptotisch normalisiert mit Varianz $3/(2n - 1)$. Verf. berechnet bei beliebigen Populationen die ersten 4 Momente und Schiefe und Excess γ_1, γ_2 für die Verteilung von y und zeigt, daß für nicht-normale Edgeworth-Populationen mit Gliedern bis zu den Halbinvarianten λ_3, λ_4 die Größen γ_1, γ_2 keineswegs zu vernachlässigen sind, die Verteilung von y also keineswegs durch eine normale approximiert wird.

M. P. Geppert.

Finetti, Bruno de: Gli eventi equivalenti e il caso degenero. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 15, 40—64 (1952).

Sei $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ eine Folge von Ereignissen mit stochastischem Charakter. $\omega_r^{(n)}$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter den n ersten Ereignissen r günstige Resultate befinden. Mit $\Phi(\xi)$ werde eine beliebige Massenverteilung im Intervall $0 \leq \xi \leq 1$ bezeichnet,

$$\int_0^1 d\Phi(\xi) = 1 \quad d\Phi(\xi) \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq \xi \leq 1, \quad d\Phi(\xi) = 0 \quad \text{für } \xi < 0 \quad \text{oder } \xi > 1.$$

Wenn die Ereignisse äquivalent sind, gilt die Darstellung

$$\omega_r^{(n)} = \binom{n}{r} \int_0^1 \xi^r (1 - \xi)^s d\Phi(\xi), \quad s = n - r.$$

Der Verf. diskutiert solche Folgen äquivalenter Ereignisse analytisch und geometrisch an Hand einer Figur im Sinne einer Irrfahrt im Straßennetz und betrachtet insbesondere Degenerationsfälle, die durch geeignete Grenzübergänge entstehen, bei denen die Masse im Punkt $\xi = 0$ oder 1 konzentriert wird. Er zeigt, daß diese Spezialfälle mit Untersuchungen von M. Dumas (dies. Zbl. 29, 154) und R. Carnap (The continuum of inductive methods, Chicago 1952, dies. Zbl. 47, 372) zusammenhängen.

W. Saxer.

Lévy, Paul: Processus à la fois stationnaires et markoviens pour les systèmes ayant une infinité dénombrable d'états possibles. *Proc. Internat. Congr. Math.* (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 549—554 (1952).

Bericht über die ersten Ergebnisse des Verf. betreffend Markoffsche Prozesse, die unendlichviele Schritte in endlicher Zeit gestatten. Es werden hier eingeführt: getrennte Betrachtung der Folge der Zustände und der zugehörigen Zeitintervalle; Konvergenz einer Reihe von Mittelwerten der Zeitintervalle; fiktive Zustände; endlicher, transfiniter und allgemeiner Fall; usw. (Verf. hat inzwischen seine Ergebnisse weiter ergänzt, s. dies. Zbl. 51, 357).

B. de Finetti.

Takács, Lajos: Wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung von Koinzidenz-Erscheinungen, mit Ereignissen gleicher Zeitdauer. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 731—737, russische und deutsche Zusammenfassgn. 738, 739—740 (1952) [Ungarisch].

This lecture contains essentially the results which the author published elsewhere [Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei 1, 371—386 (1951); this Zbl. 45, 78]. E. Lukacs (R).

Statistik:

● **Neyman, Jerzy: Lectures and conferences on mathematical statistics and probability.** 2. ed., revised and enlarged. Washington: Graduate School, Department of Agriculture 1952. VII, 274 p.

This is a printed and substantially revised edition of a mimeographed collection of conferences, published in 1938. They are throughout concerned with fundamental questions in statistics: the role of probability, testing of hypotheses, randomized versus systematic designs, sampling methods, estimation theory. Despite the fact that all but two of these essays date from the 30's, they are still well worth reading, not least from a historical point of view. For example, the last chapter gives the author's views on the famous controversy about confidence intervals and fiducial limits. Among less well-known topics, the reader notices an instructive discussion of „Bayes estimation“, including the so-called modernized approach; and, in the last section, and excellent presentation of Stein's sequential procedure. The style is vivid, picturesque, often polemic. G. Elfving.

● **Anderson, R. L. and T. A. Bancroft: Statistical theory in research.** New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1952. XIX, 399 p. 52/6 d.

Aus zwei unabhängigen Vorlesungen, die Bancroft 1946 im North Carolina State College über allgemeine mathematische Statistik und Anderson 1948 am Iowa State College über Versuchsplanung gehalten haben, ist das vorliegende Werk zusammengefügt worden, als Lehrbuch der mathematischen Statistik (für Fortgeschrittene) und Nachschlagewerk für den Forscher und Experimentator. Dem letzteren Zweck wird es gerecht durch reichhaltige, sehr detaillierte Literaturverzeichnisse, die den einzelnen Abschnitten angefügt sind. Die der Entstehung entsprechende Zweiteilung des Stoffes ist beibehalten. Teil I (Bancroft) bringt: Grundbegriffe und Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, eindimensionale Verteilungen (Binomial-, Poisson-, Normal-, Gamma-, Beta-Verteilung), Momente, Kumulanten und erzeugende Funktionen, Theorie der zwei- und mehrdimensionalen Verteilungen, Linearfunktionen, Theorie der Stichproben aus normalen Populationen (χ^2 -, Student- und F -Verteilung), Fishers Punktschätzungstheorie und „Information“, Maximum-likelihood, Intervallschätzung, Neyman-Pearson-Theorie der Hypothesenprüfung, χ^2 -Theorie; Teil II (Anderson): Analyse von Versuchsmodellen nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate, u. zw. im einzelnen: Regressionstheorie, Prinzip der kleinsten Quadrate in der Versuchsplanung, vollständige Blöcke und lateinisches Quadrat, unvollständige Blöcke, faktorielle Versuche, Kovarianzanalyse, Varianzkomponenten, gemischte Modelle, Zwischenblock-Information. Die Darstellung setzt Differential- und Integralrechnung voraus und die in einem geschlossenen Abschnitt kurz zusammengestellten Elemente der Matrix-Algebra. In Teil I sind die mathematischen Herleitungen im wesentlichen lückenlos zu finden; in Teil II steht die Illustration am Zahlenbeispiel im Vordergrund. Für den Experimentator wird sich Tab. 18,2 als wertvoll erweisen, in der die Charakteristiken und Vorzüge einiger wichtigster Versuchspläne übersichtlich zusammengestellt sind; für den Lehrer der Entwurf zu einem Lehrplan für ein 2-semestriges Kolleg an Hand des Buches. Auf Seite 70 und 110 sei auf einen wesentlichen Druckfehler in der Formel für das Confidenzintervall des Populationsmittelwertes hingewiesen. In beiden Teilen ist die Darstellung klar und sorgfältig, so daß das Werk dem von den Autoren angesprochenen Leserkreis durchaus empfohlen werden kann. M. P. Geppert.

Gordon, M. H., E. H. Loveland and E. E. Cureton: An extended table of chi-square for two degrees of freedom, for use in combining probabilities from independent samples. Psychometrika 17, 311—316 (1952).

● **Quenouille, M. H.: Associated measurements.** New York: Academic Press 1952. X, 242 p. \$ 5,80.

● **Bowker, A. H. and H. P. Goode: Sampling inspection by variables.** New York: McGraw-Hill Book Co. Inc. 1952. XI, 216 p. \$ 5,—.

● **Kemphorne, Oscar:** The design and analysis of experiments. New York, Wiley & Sons 1952. \$ 8,50.

Hayashi, Chikio: On the prediction of phenomena from qualitative data and the quantification of qualitative data from the mathematico-statistical point of view. Ann. Inst. statist. Math. 3, 69—98 (1952).

This paper is, in the main, an exposition (marred by a faulty and often unintelligible English) of some fundamental ideas in statistical methodology. In particular, the design and analysis of surveys resulting in 'qualitative data' (frequency tables) is discussed and methods of controlling certain systematic sources of variation are indicated. The possibilities of using for this purpose (a) a correlated quantitative variable, and (b) a suitable stratification of the data, are examined and certain relations between (a) and (b) established. In particular the possibility of using quantitative variables for the construction of strata is stressed and the problem of an 'optimum' method of doing this posed.

H. O. Hartley.

Bose, Raj Chandra: Mathematics of factorial designs. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 543—548 (1952).

After mentioning and generalising a few results in the design of experiments, due to M. M. Barnard, Mann, Plackett and Burman, and Indian writers, the author states three theorems, the first giving an upper bound to the number of constraints that can be accommodated in orthogonal arrays of strength 2 and 3, and the other two concerning the actual construction when the parameters, i. e. size, constraints, level and strength, are given.

S. Vajda.

Connor, W. S.: Some relations among the blocks of symmetrical group divisible designs. Ann. math. Statistics 23, 602—609 (1952).

The author studies semi-regular and regular group-divisible designs which are symmetrical, i. e. $r = k$ or, equivalently, $b = v$. (For definitions and notation see Bose and Connor, this Zbl. 47, 129.) He defines an „incidence“ matrix and two „structure“ matrices for such designs and describes some of their properties. His main theorems concern inequalities for the number of treatments common to two blocks.

S. Vajda.

Primrose, E. J. F.: Resolvable balanced incomplete block designs. Sankhya 12, 137—140 (1952).

Ein „balanced incomplete block design“ heißt auflösbar, wenn die b Blöcke, aus denen es besteht, sich in r Teilsysteme von je n Blöcken derart aufteilen lassen, daß jede Varietät in jedem Teilsystem genau einmal auftritt. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 388) hat Verf. gezeigt, wie man in einer projektiven Geometrie über GF_m aus Punkten (als Varietäten) und aus C^2 (als Blöcken) solche „designs“ aufbauen kann. Aus den damals errechneten Formeln folgt, daß Auflösbarkeit nur für die Dimension 3 und die Nicht-Regelflächen in Frage kommt. Für die Fälle $m = 2$ und 3 wird die Auflösbarkeit nachgewiesen.

F. W. Levi.

Roy, S. N.: On some aspects of statistical inference. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 555—564 (1952).

Die in mehreren praktischen Anwendungen benutzten „Test“-Methoden müssen verbessert werden, um der neuesten Prinzipienforschung zu entsprechen; doch ist das oft schwierig, wenn die Bedingung der „gleichmäßig größten Mächtigkeit“ nicht erfüllbar (oder nur in schwächerem Sinne erfüllbar) ist. Die Sachlage wird durch Vergleichen erklärt zwischen denselben drei Problemen bzw. im Falle der eindimensionalen und mehrdimensionalen statistischen Analyse; für die technische Bearbeitung dieser Fragen siehe zwei Abhandlungen des Verf. (dies. Zbl. 45, 227 und Fortsetzung dazu, im Druck).

B. de Finetti.

Scheffé, Henry: An analysis of variance for paired comparison. J. Amer. statist. Assoc. 47, 381—400 (1952).

The author considers the following problem: In a paired comparison test of m brands of a product each of the $m(m-1)/2$ pairs is presented to $2r$ judges, to r in one order and to r in the reverse order. Each pair i, j of brands is judged on a 7 point scale: i preferred strongly to j (+3), i preferred moderately to j (+2), i preferred slightly to j (+1), no preference (0), and the reverse for, -1, -2, -3. Let x_{ijk} stand for the score given to the i, j comparison by its k -th judge. A certain analysis of variance model is assumed for the x_{ijk} resulting in formulas for brand effects, judge effects and order effects (i. e. i, j versus j, i) and an analysis of variance procedure set up under certain assumptions. Associated tests of significance (on classical analysis of variance lines) will depend on the assumption of approximate homogeneity of variance and normality of residuals, both of which are regarded as doubtful and are tested in examples. Finally analysis of variance techniques for multiple comparisons are applied. *H. O. Hartley.*

Darling, D. A.: On a test for homogeneity and extreme values. *Ann. math. Statistics* 23, 450—456 (1952).

Consider a variate x with a density function $\Phi(x)$ and capable of attaining positive values only. Further denote by x_1, \dots, x_n a random sample of size n from $\Phi(x)$. The author considers the random sampling distribution of the ratio $z_n = \sum x_i / x_{\max}$. He obtains an expression for the characteristic function of z_n and inverts this in the following cases, confirming the quoted known results: $\Phi(x) = 1$ (rectangular distribution) (Malmquist, this Zbl. 41, 467), $\Phi(x) = \Gamma^{-1}(k/2) e^{-x} x^{k/2-1}$ (Γ - or χ^2 -distribution) [Cochran, *Ann. Eugenics* 11, 47—52 (1941)] and in the special case $k = 2$, $\Phi(x) = e^{-x}$ (exponential distribution) [Fisher, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 125, 54—59 (1929)]. He finally obtains a limiting distribution for $n \rightarrow \infty$. *H. O. Hartley.*

Tiago De Oliveira, J.: Tests for the equality of proportions in a multinomial population. *Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A* 2, 197—200 (1952).

Wenn man in der Wahrscheinlichkeitsformel für das Schema der wiederholten Beobachtungen mit drei Alternativen

$$P = (n! / n_1! n_2! n_3!) p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \quad (p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad n_1 + n_2 + n_3 = n)$$

die Voraussetzung $p_1 = p_2 = p$ macht, so ist die Gleichheit dieser Voraussetzung mit der Voraussetzung, die der Formel $P' = [n! / (n_1 + n_2)! n_3!] (2p)^{n_1+n_2} (1-2p)^{n_3}$ entspricht, unmittelbar klar, durch die Anwendung des Satzes von Bayes. Im Falle, daß der Wert $p_1 = p_2 = p$ bekannt ist, führt diese Vergleichung zur Analyse der Verteilung der zufälligen Variablen $\delta = n_1 - n_2$, die der Verf. mittels der differentiellen Eigenschaften der erzeugenden Funktion der Momente erläutert.

J. M^a. Orts.

White, Colin: The use of ranks in a test of significance for comparing two treatments. *Biometrics* 8, 33—41 (1952).

Moses, L. E.: A two-sample test. *Psychometrika* 17, 239—247 (1952).

Bahadur, R. R.: A property of the t -statistic. *Sankhya* 12, 79—88 (1952).

Let two normal populations with means m_1 and m_2 and common variance be given and let it be required to make a statement about the relative magnitude of the two unknown means. The author suggests the following procedure: perform the two-sided t -test of $m_1 = m_2$ at level α . If $m_1 = m_2$ is rejected, assert that the relative order of the means is the same as that of the sample means. Otherwise reserve judgment. He shows that the probability of an incorrect assertion is $\leq \alpha/2$ and that of reserving judgment is $\leq 1 - \alpha$. The test is best in the obvious sense.

S. Vajda.

Wald, Abraham: Basic ideas of a general theory of statistical decision rules. *Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950)* 1, 231—243 (1952).

Expository lecture.

G. Elfving.

Ghosh, M. N.: An extension of Wald's decision theory to unbounded weight functions. *Sankhyā* 12, 8—26 (1952).

Extension of Wald's main results to unbounded weight functions and semi-compact spaces of distributions and terminal decisions. Under seven assumptions,

too long to quote here, it is proved that the wide-sense Bayes solutions form a complete class including a minimax solution. *G. Elfving.*

Matusita, Kameo and Hirotugu Akaike: Note on the decision problem. *Ann. Inst. statist. Math.* **4**, 11—14 (1952).

The authors point out that an earlier result of one of them [Matusita, presumably *Ann. Inst. statist. Math.* **3**, 17—35 (1951) (see this *Zbl.* **44**, 149), though the reference in the paper is incomplete] can be used to construct critical regions for the hypothesis that a distribution function is one out of a finite or infinite set of admissible distributions, and that the risk can be made smaller than any given quantity, provided the sample size is large enough and the weight function is bounded. The result is illustrated by sets of normal or Poisson distributions and by numerical examples. *S. Vajda.*

Matusita, Kameo: Correction to the paper „On the theory of statistical decision functions“. This *Annals Vol. III.* *Ann. Inst. statist. Math.* **4**, 51—53 (1952).

A set of 7 corrections to the paper mentioned in the title (see this *Zbl.* **44**, 149). *S. Vajda.*

King, Edgard P.: The operating characteristic of the control chart sample means. *Ann. math. Statistics* **23**, 384—395 (1952).

The author considers the following problem in quality control: Denote by x_{ij} the j -th reading in the i -th sample ($j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, m$). Assume the model $x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ where the ε_{ij} are independent values from $N(0, \sigma^2)$ and the following assumptions are made about the μ_i : H_0 (controlled state) all $\mu_i = \mu$, H_1 (out of control) the μ_i are a random sample from $N(\mu, \theta^2 \sigma^2)$, where μ and σ are fixed but unknown. It is required to obtain the power of the customary control chart for mean (for which control limits are to be based on the familiar multiples of mean range) under the above assumptions. This problem is first solved under the assumption that σ is known and the power, β_0 , so obtained modified to cover the case where σ is estimated by use of mean range w . Since the power for $\sigma = \text{known}$ gives the conditional probability of \bar{x} when w has a fixed value, the first obtained power need only be weighted by the distribution of mean range. With the help of a Taylor expansion the solution is, for small m , obtained in terms of moments of range recently more comprehensively tabulated by Hartley and Pearson [*Biometrika* **38**, 463—464 (1951)]. For large m upper and lower bounds for the power are obtained. *H. O. Hartley.*

Ogawa, Junjiro: Contributions to the theory of systematic statistics. II. *Osaka math. J.* **4**, 41—67 (1952).

This paper is in the main a comprehensive exposition of the theory of estimation and the testing of associated hypothesis arising in both: Dosage-mortality and time-mortality work. The results are however confined to an asymptotic theory derived from the asymptotically multivariate normal distribution for the residuals in the Probit- or time-mortality regression. From these are first obtained the familiar maximum likelihood estimators of the mean μ and the variance σ^2 of the basic tolerance distribution. Certain general results in the theory of testing linear hypothesis derived previously (this *Zbl.* **44**, 343) are then applied to the present situation, resulting in the test procedures on the basic assumptions underlying the probit- and time-mortality theory of estimation. This treatment includes confidence regions in the μ, σ space. Finally some results on the optimum design are obtained. *H. O. Hartley.*

Tiago De Oliveira, J.: A note on a special case of inverse binomial sampling. *Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A* **2**, 111—114 (1952).

Sei $p(0 \leq p \leq 1)$ das anteilmäßige Vorkommen einer Eigenschaft A in einer Population. Entnimmt man derselben Stichproben mit Zurücklegen, bis man zum ersten Male A erhält, und hört dann auf, so erhält man eine Verteilung, die als inverse Binomialverteilung bezeichnet wird. Sie ist J -förmig. Das Problem ist, aus der als bekannt vorausgesetzten Verteilung den unbekannten Wert von p zu erschließen. Verf. verwendet dazu das Tschebyscheffsche Lemma und diskutiert Tests für die Beurteilung des Ergebnisses. *P. Lorenz.*

Rao, C. Radhakrishna: Some theorems on minimum variance estimation. *Sankhya* **12**, 27—42 (1952).

The author studies parameter functions which have minimum variance, either locally or uniformly. He states the following Main Theorem: „If the parent distri-

bution $p(x|\theta)$ is such that for any parameter function which admits an unbiased estimate a uniformly minimum variance estimator can be constructed from independent samples of any size, then $p(x|\theta)$ admits also sufficient statistics". This is the converse of a theorem which follows from two earlier papers of the author's [Bull. Calcutta math. Soc. 37, 81—91 (1945) and this Zbl. 37, 367]. The paper contains many more ideas, but the argument is difficult to follow, since it depends on earlier references which are not always precisely given and names are sometimes misspelt. (E. g. Salmon for Solomon.) *S. Vajda.*

Basu, D.: An example of non-existence of minimum variance estimator. *Sankhyā* 12, 43—44 (1952).

Given a random sample from a population with probability density $c \exp [-(x - \theta)^4]$, no minimum variance unbiased estimator exists for the function $\theta^3 + 3\mu_2\theta$, where μ_2 is the second central moment of x . *S. Vajda.*

Basu, D.: On symmetric estimators in point estimation with convex weight functions. *Sankhyā* 12, 45—52 (1952).

Let a set of cumulative distribution functions $F(x_1, \dots, x_n)$ be given which are all symmetric in x_i and x_j , let t be an estimator of a parameter in F and $W(t, F)$ a strictly convex loss function. Then every admissible estimator (in the sense of Wald's theory of decision functions) is symmetric in x_i and x_j . If the loss function is (not strictly) convex, then there is an essentially symmetric estimator with the same risk function as any admissible estimator. *S. Vajda.*

Rao, C. Radhakrishna: Minimum variance estimation in distributions admitting ancillary statistics. *Sankhyā* 12, 53—56 (1952).

The author studies minimum variance unbiased estimators when the parent distribution admits ancillary statistics. As an illustration, he refers to an example due to D. Basu, where the maximum likelihood estimate is not asymptotically of minimum variance. *S. Vajda.*

Basu, D.: On a class of admissible estimators of the normal variance. *Sankhyā* 12, 57—62 (1952).

In the introduction it is pointed out that of all estimators $a\Sigma(x_i - m)^2 = aS$ of the variance of a normal distribution with known mean, $S/(n+2)$ is the only admissible one (and S/n is not), taking the square of error as the loss function. With the same loss function the author shows that any admissible estimator of the variance, for which the risk function is independent of the mean m , is essentially a function of S alone. *S. Vajda.*

Kazami, Akiko: Asymptotic properties of the estimates of an unknown parameter in stationary Markoff process. *Ann. Inst. statist. Math.* 4, 1—6 (1952).

The author proves that under certain conditions — too long to quote here — there exists a maximum likelihood estimate of the parameter of a stationary Markov process which is consistent and asymptotically efficient in the wide sense. If the process is also ergodic and Gaussian, then estimates can be found which are also asymptotically normal. *S. Vajda.*

Isida, Masatugu D.: A remark on the linear regression estimate. *Ann. Inst. statist. Math.* 4, 7—9 (1952).

Sei (y_1, y_2, \dots, y_n) eine Stichprobe aus einer unendlichen Population und x eine mit y korrelierte Hilfsveränderliche. Für den Fall, daß y eine lineare Funktion von x plus einer zufälligen Veränderlichen ist, hat W. G. Cochran die Streuung einer Schätzung des Mittelwertes der Population mittels des Lemmas von Tschebyscheff berechnet. Verf. entwickelt eine wirksamere Methode mittels Berechnung des 3. und 4. Moments. *P. Lorenz.*

Bennet, B. M.: Estimation of means on the basis of preliminary tests of significance. *Ann. Inst. statist. Math.* 4, 31—43 (1952).

Auf Grund zweier voneinander unabhängiger Stichproben aus normal verteilten Populationen $N(\xi, \sigma_1^2)$ und $N(\eta, \sigma_2^2)$ werde ξ geschätzt durch den Mittelwert \bar{x} der ersten Probe bzw. durch ein gewogenes Mittel der Mittelwerte \bar{x}, \bar{y} beider Proben, je nachdem, ob Prüfung von $\bar{x} - \bar{y}$ mittels Normalverteilung (wenn $\sigma_1 = \sigma_2$ bekannt) oder Student-Verteilung (wenn $\sigma_1 \neq \sigma_2$ bekannt oder $\sigma_1 = \sigma_2$ unbekannt) oder Student-Test nach Anwendung von F -Test (σ_1, σ_2 unbekannt) die Mittelwertdifferenz als zufällig oder als signifikant erweist. Verf. untersucht in den verschiedenen Fällen die Verteilung dieser Schätzung x' und bestimmt $E(x')$ und $\text{var } x'$; ferner die Potenzfunktion (power function) des üblichen Student-Tests für die Mittelwerte nach vorangegangenem F -Test für die Varianzen.

M. P. Geppert.

● **Jakowlew, K. P.: Mathematische Auswertung von Meßergebnissen.** (Übersetzung a. d. Russ. von H. Rudel, redig. von E. Henze). Berlin: Verlag Technik 1952. 262 S. 62 Abb. DM 34,—.

Das Buch (Übersetzung des 1950 im Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur, Moskau erschienenen Originals) behandelt in sehr ausführlicher und möglichst elementar gehaltener Darstellung die bei der Auswertung und Darstellung von Meßergebnissen auftretenden Probleme und Methoden. Die mathematischen Kommentare sind trotz oder vielleicht wegen ihres Wortreichtums nicht immer ganz klar. Z. B. findet man eine Seite reinen Text über den Interpolationsfehler mit Sätzen wie „Ein allgemeiner Lehrsatz der Differentialrechnung besagt, daß sich jede Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe, d. h. durch ein ganzes rationales Polynom n -ten Grades wiedergeben läßt, wobei jedoch Bedingung ist, daß es sich um eine stetige Funktion handelt, die eine kontinuierliche Reihe Ableitungen bis zur n -ten einschließlich hat“ oder „Es ist offensichtlich, daß der Interpolationsfehler der algebraischen Summe all der Glieder einer Reihenentwicklung entspricht, die wir beim Interpolieren vernachlässigen“; eine formelmäßige Angabe des Interpolationsfehlers wäre kürzer, klarer und richtiger gewesen. Gelegentlich haben die deutschen Herausgeber durch Anmerkungen klärend eingegriffen. Der Wert des Buches dürfte in den zahlreichen, bis ins Einzelne durchgeführten Beispielen liegen. — Inhalt: I. Näherungsgrößen und ihre Fehler (19 S.). II. Arithmetische Grundrechenarten mit Näherungszahlen (21 S.). III. Formelfehler und die allgemeine Theorie der Fehler (32 S.). IV. Das Gesetz der normalen Verteilung zufälliger Fehler (21 S.). V. Genauigkeitsmerkmale der Meßergebnisse (28 S.). VI. Die wichtigsten Verfahren der graphischen Auswertung von Meßergebnissen (22 S.). VII. Elemente der Nomographie (15 S.). VIII. Hauptverfahren der Interpolation (26 S.). IX. Grundzüge der harmonischen Analyse (23 S.). X. Empirische Formeln (53 S.).

J. Weissinger.

Sukhatme, P. V.: Measurement of observational errors in surveys. *Revue Inst. internat. Statist.* **20**, 121—134 (1952).

In der klassischen Theorie der Stichprobenerhebungen aus endlichen Gesamtheiten — (Umfang N) — nimmt man an, daß der Wert einer Größe in der Stichprobe nicht davon abhängt, wer diese Größe bestimmt hat. Da diese Annahme i. a., z. B. bei optischen Ernteschätzungen, nicht erfüllt ist, betrachtet Verf. ein allgemeines mathematisches Modell: $y_{ij} = x_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$, wobei y_{ij} = gemessener Wert, x_i = wahrer Wert, α_j = systematischer Fehler der j -ten Zählperson bei wiederholten Beobachtungen an allen Stichprobeneinheiten (enumerator's bias), ε_{ij} = Abweichung von y_{ij} von $x_i + \alpha_j$. Es wird angenommen, daß die m Zählpersonen eine zufällige Stichprobe aus M sind, die (Ernte-)Stichprobe aus h Einheiten besteht, jede Zählperson n Beobachtungen macht und jede Einheit p -mal bestimmt wird. Dann gilt für den Mittelwert $y_{..}$ aller Beobachtungen in der Stichprobe

$$E(y_{..}) = \mu + \bar{\alpha} \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \alpha_j; \quad \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Die Varianz von $y_{..}$ ist $V(y_{..}) = \sigma^2(1/h - 1/N) + \sigma_{\alpha}^2(1/m - 1/M) + \sigma_{\varepsilon}^2/hp$, wobei

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2, \quad \sigma_{\alpha}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\alpha_j - \bar{\alpha})^2, \quad \sigma_{\varepsilon}^2 = E(\varepsilon_{ij}^2 | j).$$

Für N und $M \rightarrow \infty$ und $p = 1$ wird $V(y_{..}) = \sigma_y^2/h + \sigma_{\alpha}^2(1/m - 1/h)$. Auch bei $\alpha = 0$ ist σ_{α} wesentlich. Verf. gibt Schätzungen der Komponenten der Varianz und die den obigen entsprechenden Formeln für geschichtete Stichproben und für solche, bei denen die Zuordnung zwischen Zählpersonen und Stichprobeneinheiten nicht zufällig ist. In allen Fällen kann durch Erhöhung der Anzahl der Zählpersonen $V(y_{..})$ vermindert werden. Die Kostenfunktion zeigt, daß m um so größer sein sollte, je größer $\sigma_{\alpha}^2/(\sigma_y^2 - \sigma_{\alpha}^2)$ ist. Es erhebt sich die Frage, ob man eine Stichprobe stets zufällig über die Zählpersonen verteilen soll, um eine Messung von σ_{α} möglich zu machen und die Signifikanz gegenüber der gesamten Varianz zu testen. Diese Frage ist von V. G. Panse und Verf. an anderer Stelle [*J. Indian Soc. agric. Stat.* **1**, 1 (1948)] behandelt,

das Ergebnis — wiederholte Stichproben (replicated samples) allgemein bei Stichproben-erhebungen einzuführen, wird nicht befürwortet — wird hier erneut begründet und erläutert.
M. P. Geppert-O. Ludwig.

Ogawa, Junjiro: Analytical derivation of sampling distribution of intraclass correlation coefficient. Osaka math. J. 4, 69—76 (1952).

The author gives an analytical proof for the random sampling distribution of the intraclass correlation, r , previously derived by R. A. Fisher [Metron 1 (1921)] with the help of a geometrical argument. The present method starts from the (bivariate normal) joint distribution of an observed pair x, x' and from this the author derives, with the help of variate transformations, the joint moment generating function of μ^2 and $\mu^2 r$ where $2n\mu^2 = \sum \{(x_i - \bar{x})^2 + (x'_i - \bar{x}')^2\}$. This is then inverted with the help of contour integration, the joint distribution of μ^2 and $\mu^2 r$ reached and finally the distribution of r obtained by a simple integration.

H. O. Hartley.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Leslie, P. H.: The estimation of population parameters from data obtained by means of the capture-recapture method. II. The estimation of total numbers. Biometrika 39, 363—388 (1952).

(Part I and III see this Zbl. 44, 345 and 51, 110.) The problem of estimating total numbers of a population at risk of capture is considered in the following cases: 1) the estimation of the total number when the death rate is assumed to remain constant over the period of sampling, and dilution of the population is occurring (due to new births, immigrants etc.); 2) estimation when no dilution is occurring, but the death rate is changing; 3) when the death rate is varying both in time and in different groups of animals; 4) in the simplest case, in which it can be assumed that dilution and death rate, if any, are constant; and only total number and survival factor are to be calculated. — A test for checking absence of dilution, and an approximate rapid method are discussed on the basis of actual data.

L. Cavalli.

Kendall, David G.: Les processus stochastiques de croissance en biologie. Ann. Inst. Henri Poincaré 13, 43—108 (1952).

A very useful summary of the work done by the author and other research workers on stochastic processes of growth in biology. The following cases are considered: 1. growth of a bacterial population: distribution of division times, according to various hypotheses; distribution of the numbers of bacteria in parallel colonies all started from a single cell, after a fixed time. 2. distribution of the numbers of mutants in a bacterial population in a fairly general case. 3. The birth and death process, when the life of each individual does, or does not, depend upon that of others. Distributions of population numbers, probabilities of extinction, and age distributions are considered.

L. Cavalli.

Plackett, R. L. and P. S. Hewlett: Quantal responses to mixtures of poisons. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 14, 141—163 (1952).

The association of drugs gives rise to complex types of dose-% of response curves. The authors develop a theory to account for the response to mixtures of poisons, on the basis of the following assumptions: 1) each poison acts on a given physiological system, and the amount of poison transmitted to the site of action, λ , is a function of the dose administered according to: $\lambda = a \cdot z^b$ where z is the dose, a, b are constants. 2) for each poison, there is a minimum effective amount acting for each individual, and this minimum is distributed in the population according to some given probability law, usually the log normal distribution; 3) the joint action of the two poisons is to be described according to one of the two models: (i) the two poisons act on the same physiological system (similar joint action); (ii) the two poisons act on distinct systems (dissimilar joint action). Each of these two models can be further complicated by the possible presence of interaction, defined as an effect such that the presence of one drug influences the amount of the other drug reaching its own site of action, or the changes which it will there elicit. A further complication is the possibility of correlation in the sensitivity.

to the two drugs. Except in limiting cases, the equations obtained present problems of estimation of some importance, especially in view of the magnitude of errors involved in most pharmacological experiments. *L. Cavalli.*

Sampford, M. R.: The estimation of response-time distributions. I: Fundamental concepts and general methods. II: Multistimulus distributions. *Biometrics* 8, 13—32, 307—369 (1952).

Chiario, Adolfo del: Sulla determinazione delle probabilità di eliminazione. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 15, 235—249 (1952).

Wenn in einer sich erneuernden Personengesamtheit bezeichnen $l(x)$ die Ausgangsgesamtheit des Alters x , $m_x(u) du$ die im Alter u bis $u + du$ aus der Ursache λ ausgeschiedenen Personen, $k(u) du$ den Unterschied zwischen den Neueintritten im Alter u bis $u + du$ und den aus andern Ursachen als infolge λ ausgeschiedenen, so ist die Ausscheidewahrscheinlichkeit $q_\lambda(x, t)$ für die Ursache λ über die Altersstrecke x bis t gegeben durch

$$\int_x^t m_x(u) du = l(x) q_\lambda(x, t) + \int_x^t k(u) q_\lambda(u, t) du.$$

Zur numerischen Auflösung nach $q_\lambda(x, t)$ sind in der Regel nebeneinander mehrere Annahmen nötig, z. B. über die Ausscheideintensität $\mu_\lambda(u)$ für die Ursache u , über $k(u)$ usw. Der Verf. leitet verschiedene Näherungen her und prüft die dabei erforderlichen Annahmen — und damit auch die Ergebnisse — auf Widerspruchsfreiheit. *E. Zwinggi.*

Gini, Corrado: Estensione della teoria della dispersione e della connessione a serie di grandezze assolute. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 15, 4—24 (1952).

Das Verhältnis Q^2 zwischen beobachteter und „theoretischer“ Streuung wird außerhalb des üblichen Häufigkeitsfalls betrachtet und Q auch dort als „Dispersion“ bezeichnet. Verschiedene Fälle von „theoretischen“ Schemen werden dargestellt; als Beispiel gelte folgendes: m Einkommen a_1, a_2, \dots, a_m sind zwischen s Länder aufgeteilt (m_i , mit Mittelwert A_i , für das Land i); beobachtete Streuung = $\sum_i \left(m_i A_i - \left(\frac{m}{s} A \right)^2 \right)$; „theoretische“ Streuung = $m(s B^2 - A^2)$, wo A, B = arithmetische bzw. quadratische Mittel der a_i (Voraussetzung: jedes der m Einkommen wird zufällig einem der s Länder zugeschrieben). *B. de Finetti.*

Jecklin, Heinrich: Sull'interpolazione iperbolica. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 15, 250—260 (1952).

Es werden einige Eigenschaften der hyperbolischen Interpolation sowie deren Anwendung auf Aufgaben der Finanzmathematik behandelt (vgl. auch dies. Zbl. 33, 69). *R. Zurmühl.*

Tedeschi, Bruno: Teorica dei tre usuali sistemi di sconto e critiche relative. I, II. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 15, 104—145, 286—304 (1952).

I. Die drei gewöhnlichen Systeme der „Zinseszins-“, der „auf Hundert-“ und der „kaufmännischen (vom Hundert-“) Diskontierung werden vollständig formuliert und miteinander verglichen, um verbreitete Mißverständnisse zu klären. II. Mehrere Probleme betreffend Bankgeschäfte werden behandelt, um damit die praktische Bedeutung der Bemerkungen in (I) zu zeigen. *B. de Finetti.*

Eyraud, Henri: Transfiscalité et rétrofiscalité. *Ann. Univ. Lyon, III. Sér., Sect. A* 15, 37—45 (1952).

Mazzoni, Pacifico: Equazioni differenziali per le rendite continue. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 15, 85—92 (1952).

Der Verf. leitet für den Endwert s einer Zeitrente verschiedene Differentialgleichungen ab und kann damit zeigen, daß allgemein $s'/s < s''/s' < s'''/s'' < \dots$ gilt. Die gleiche Beziehung ist auch gültig für den Rentenbarwert. *E. Zwinggi.*

Zwigg, Ernst: Un procedimento per determinare il saggio d'interesse di rendite vitalizie e rendite certe. Giorn. Ist. Ital. Attuari 15, 261—268 (1952).

Anfangspunkt: Entwicklung der Rente als Potenzreihe in ε [$v = v_0(1 + \varepsilon)$, $v = 1/(1 + i)$, $v_0 = 1/(1 + i_0)$]; drei Glieder werden benutzt. *B. de Finetti.*

Nicosia, Francesco M.: Sulla teorica dei capitali accumulati. Giorn. Ist. Ital. Attuari 15, 269—275 (1952).

Anwendung der Cantellischen Theorie der Kapitalsansammlung und der verallgemeinerten Entwicklung von Taucer auf den von Wyss behandelten Fall [Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 48, 171—205 (1948)]. *B. de Finetti.*

Hagstroem, K. G.: Considerazioni intorno al simbolismo matematico e alla capitalizzazione. Giorn. Ist. Ital. Attuari 15, 276—285 (1952).

Bemerkungen über mehrere strittige Punkte bei den Vorschlägen für einen internationalen Symbolismus in der Versicherungsmathematik. Andere Vorschläge, z. B. $\frac{0}{100}$ und $\frac{0}{100}$ als „Zinsfuß $\frac{0}{100}$, halbjährlich bzw. kontinuierlich zahlbar“. *B. de Finetti.*

Ottaviani, Giuseppe: Sul problema della riassicurazione. Giorn. Ist. Ital. Attuari 15, 65—84 (1952).

Untersuchungen über die Höhe des Selbstbehaltes auf Grund der Ergebnisse der „klassischen“ Risikotheorie und unter Berücksichtigung des vorhandenen Schwankungsfonds des Erstversicherers. *E. Zwigg.*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

● **Berghuys, J. J. W.:** Grundlagen der anschaulichen Geometrie. (Mit franz. und engl. Zusammenfassg.). Groningen-Djakarta: P. Noordhoff 1952. 231 p. f. 9.50. [Holländisch].

Die Frage nach der Bedeutung der Anschauung und der Evidenz in der Geometrie ist fast so alt wie die Mathematik überhaupt. Es handelt sich um eine philosophische Frage, und man kann daher nicht eine eindeutige Antwort verlangen, zumal der philosophische Ausgangspunkt sich nicht eliminieren läßt. Außerdem ist die Geometrie nicht ein statisches System. Es sind eben die Wandlung der Methodik und die Änderung in der Stellungnahme zu den Grundlagenfragen, die den Philosophen immer wieder neue Schwierigkeiten bereiten. Etwas Vernünftiges kann man nur erwarten, wenn man das Problemgebiet gehörig einschränkt. — Verf. beschränkt sich auf die Untersuchung der klassischen Elementargeometrie. Denn hier ist die empirische Herkunft der Mathematik am leichtesten zu verfolgen. Die Fragestellung wird sowohl vom historischen als vom systematischen Gesichtspunkt aus betrachtet. Die Behauptungen des Verf. sind gut dokumentiert. Intuitionistische Einflüsse sind spürbar. — Es ist nicht leicht, die Ergebnisse des Verf. kurz zu formulieren. Jedenfalls ist es klar, daß die Elementargeometrie für ihn mehr bedeutet als bloß ein logisch-deduktives System. Daher ist z. B. die Stellung der Nichteuklidischen Geometrie eine grundsätzlich andere als die der Euklidischen Elementargeometrie. Ref. vermißt in dem leicht lesbaren und flüssig geschriebenen Buche die Stellungnahme gegenüber modernen von Menger und seinen Schülern angestellten Betrachtungen über die primitivsten Aussagen der Geometrie und ihre Beziehungen zur Logik, insbesondere zur Theorie der Verbände. *J. C. H. Gerretsen.*

Rainich, G. Y.: Ternary relations in geometry and algebra. Michigan math. J. 1, 97—111 (1952).

Verf. drückt die Aussage, daß drei Punkte A, B, C der projektiven Ebene auf einer Geraden liegen, durch das Symbol $(ABC)^*$ — eine „ternäre Relation“ — aus, das die Eigenschaften der Symmetrie und Transitivität besitzt [d. h. aus $A \neq B$, $(ABC)^*$, $(ABD)^*$ folgt $(ACD)^*$]. Die Sätze von Desargues, Pappus-Pascal und vom vollständigen Viereck werden in diesem Formalismus beschrieben. — Entsprechend werden in einer additiven abelschen Gruppe die Gleichungen $a + b + c = 0$ durch $(a b c)''$ ausgedrückt und die einfachsten Rechenregeln dafür angegeben. *E. Sperner.*

Sasaki, Usa: Lattice theoretic characterization of an affine geometry of arbitrary dimensions. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 16, 223—238 (1952).

Besprechung in dies. Zbl. 51, 112.

Elementargeometrie:

Bourgin, D. G.: Restricted separation of polyhedra. Portugaliae Math. 11, 133—136 (1952).

Verf. beweist zwei Theoreme, wovon nur das erste einen natürlichen hier kurz wiederzugebenden Sachverhalt betrifft. Es wird ausgesagt: Sind S und S' zwei fremde Simplexe des n -dimensionalen euklidischen Raumes, wobei das eine durch Inversion (Spiegelung am Ursprung) und Homothetie aus dem andern hervorgeht, so lassen sich S und S' durch eine parallel zu einer passenden Seitenfläche von S bzw. S' gelegte $(n-1)$ -dimensionale Ebene separieren. — Wie Verf. durch ein Beispiel belegt, gilt dies für lediglich homothetische Simplexe nicht, falls $n \geq 3$ ist. (Ref. bemerkt, daß die Aussage des Verf. auch allgemeiner für konvexe Polyeder P und P' gilt. Dies läßt sich auf einfache Weise einsehen: Man verbinde die sich entsprechenden Schwerpunkte von P und P' und fixiere die auf der Verbindungsstrecke liegenden Randpunkte p und p' von P und P' . Eine Ebene parallel zu zwei sich entsprechenden Seitenflächen von P und P' , die p und p' enthalten, und welche p und p' trennt, separiert P und P' .) H. Hadwiger.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Sce, Michele: Sugli r birapporti di $r+3$ punti di un S_r . Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 363—374 (1952).

Die hier betrachteten r -dimensionalen Räume S_r sind immer lineare Räume über einem kommutativen Körper γ . Es seien in einem solchen Raume $r+3$ Punkte P_i gegeben; setzt man $P_{r+2} = P_1 + \dots + P_{r+1}$ und $P_{r+3} = a_1 P_1 + \dots + a_{r+1} P_{r+1}$, so nennt man $v_i = a_i/a_{r+1}$ ($i = 1, \dots, r$) die r verallgemeinerten Doppelverhältnisse der gegebenen Punkte. Sind sie alle gleich -1 , so sagt man, daß die P_i eine harmonische Gruppe bilden. Verf. gibt zunächst für eine harmonische Gruppe eine Konstruktion, die derjenigen des vollständigen Vierecks für den Fall $r = 1$ ähnlich ist; man findet, daß jede harmonische Gruppe aus $r+3$ Punkten besteht, von denen $P_{r+1}, P_{r+2}, P_{r+3}$ geradlinig liegen, während P_1, \dots, P_r eine Hyperebene bestimmen, die den vierten harmonischen Punkt zu $P_{r+1}, P_{r+2}, P_{r+3}$ enthält. Es folgen: die projektive Eigenschaft der verallgemeinerten Doppelverhältnisse; ihre analytischen Ausdrücke; ihre Änderungen bei Vertauschungen der $r+3$ Punkte. Die Kollineationen zwischen zwei r -dimensionalen Räumen S, S' werden wie bei B. Segre (Lezioni di geometria moderna, I, §16; dies. Zbl. 30, 410) definiert; sie fallen mit denjenigen von B. Segre zusammen; sie können als diejenigen eindeutigen Korrespondenzen definiert werden, die eine besondere Art von Punktgruppen (die Verf. „quasi-harmonisch“ nennt) invariant lassen. Schließlich einige Anwendungen auf die harmonischen Punktgruppen, die einer rationalen normalen Kurve oder einer Quadrik angehören, und auf die Kollineationen, die solche Gebilde in sich überführen. E. Togliatti.

Noi, Salvatore Di: Le congruenze sulla retta nella geometria proiettiva. Periodico Mat., IV. S. 29, 79—90 (1951).

Noi, Salvatore Di: Sul significato proiettivo della distanza tra due punti del piano. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 79—97 (1952).

Verf. behandelt die Aufgabe, die metrische Geometrie durch Spezialisierung der projektiven zu gewinnen. Hierzu muß eine Gruppe spezieller Kollineationen angegeben werden, die sich als kongruente Abbildungen definieren lassen. In der ersten Arbeit befaßt sich Verf. mit der Definition der Kongruenz auf einer Geraden. Hierzu fixiert man auf einer projektiven Geraden r zwei Punkte U und V und betrachtet die Gruppe aller Kollineationen, welche die Punkte U, V einzeln festlassen oder miteinander vertauschen; die durch U, V bestimmten beiden Segmente der Geraden sollen dabei einzeln in sich übergehen. Wählt man für U, V zwei verschiedene reelle „uneigentliche“ Punkte, so erhält man eine Gerade der hyperbolischen Geometrie; sind U, V konjugiert komplex, so gelangt man zur elliptischen Geometrie, in der euklidischen endlich müssen U und V in einen (uneigentlichen) Punkt zusammenfallen. — Die zweite Arbeit beschäftigt sich mit dem gleichen Problem in der Ebene. Man wählt wieder zwei feste Grundpunkte M, N und bestimmt eine Gruppe Γ_3 von Kollineationen, die das Punktepaar M, N festlassen und von gewissen harmonischen Homologien erzeugt wird. Mit Hilfe dieser Gruppe lassen sich die Gleichheit und das Verhältnis zweier Strecken, der Abstand zweier Punkte sowie der Winkel zweier Geraden definieren. Hierzu ist das Studium von Kegelschnitt-Büscheln, gebildet von gewissen Trajektorien der Gruppe Γ_3 , erforderlich. Um alle kongruenten Abbildungen der euklidischen Geometrie zu erhalten, muß man die Punkte M, N zu den beiden konjugiert komplexen Kreispunkten der Ebene spezialisieren. Der Verf. gibt an, wie im Falle der hyperbolischen und elliptischen Geometrie zu verfahren ist. W. Haack-H. von Schnakenburg.

Qvist, B.: Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* Nr. **134**, 27 S. (1952).

In una geometria piana finita si chiami sistema non-collineare di punti (n. c.-sistema) un insieme di punti che non contenga nessuna terna di punti allineati. Un n. c.-sistema contiene al più $t + 2$ punti; se t è dispari, contiene al più $t + 1$ punti. L'A. chiama $(t + 1)$ -curva in un piano grafico un n. c.-sistema formato da $t + 1$ punti (t necessariamente dispari). Tra le rette per un punto P di una $(t + 1)$ -curva ve ne è una ed una soltanto che ha con la curva in comune il solo P ; sulle altre t rette per P vi è un altro punto della curva $\neq P$. La prima retta si chiamerà tangente alla curva in P , le altre si diranno secanti. Da un punto del piano non giacente su di una data $(t + 1)$ -curva si possono condurre alla curva o esattamente due tangenti [caso dei punti esterni, in numero di $\frac{1}{2}t(t + 1)$], o nessuna [caso dei punti interni, in numero di $\frac{1}{2}t(t - 1)$]. Se $t > 5$, due $(t + 1)$ -curve che abbiano più della metà dei punti in comune coincidono. Nel caso di un piano grafico sopra un campo di Galois ($t = p^n$, p primo dispari) si ha che una conica è una $(t + 1)$ -curva. Se $f(x, y, z) = 0$ è l'equazione di una conica in coordinate omogenee, l'A. dimostra che il punto $P(x, y, z)$ è rispettivamente esterno, sulla conica, interno (o viceversa) a seconda che $f(x, y, z)$ sia residuo quadratico, zero, non-residuo. L'A. ricorda l'ipotesi di Kustaanheimo che, per t dispari, non esistano $(t + 1)$ -curve all'infuori delle coniche. (La congettura di Kustaanheimo è stata dimostrata vera da B. Segre, in una nota che comparirà prossimamente nel *Canadian Journal of Mathematics*.) — Per quel che riguarda uno spazio grafico tridimensionale l'A. dimostra che un n. c.-sistema non può possedere più di $t^2 + 1$ punti, se $t > 2$ (§ 2); e poi (§ 4), che esistono in esso n. c.-sistemi con $t^2 + 1$ punti. Indicando allora con $m_s(r, t)$ il massimo numero di punti di uno spazio grafico desarguesiano finito $(r - 1)$ -dimensionale, tale che mai s tra detti punti giacciono in uno spazio subordinato $(s - 2)$ -dimensionale, si ha che per $t > 2$, $m_s(4, t) = t^2 + 1$. Come l'A. ricorda, questo risultato estende uno dei risultati di Bose relativo ai primi valori di s, r ; in generale la presente memoria si riallaccia a quella di Bose del 1947 (questo *Zbl.* **38**, 96), differenziandosi da essa, oltre che per nuovi risultati, per la forma geometrica della trattazione. L. Lombardo-Radice.

Weber, Werner: Entbehrliche und unentbehrliche Dreieckstypen beim Hauptsatz über apolare Kurven. *Collect. Math.* **5**, 153—174 (1952).

Ein Ordnungskegelschnitt $A - \sum a_{ik} x_i x_k = 0$ — und ein Klassenkegelschnitt $B - \sum b_{ik} u_i u_k = 0$ — heißen „apolar“, wenn $\sum a_{ik} b_{ik} = 0$; es sind dann im allgemeinen ∞^1 A eingeschriebene Poldreiecke von B vorhanden, und umgekehrt bedingt im allgemeinen die Existenz eines einzigen solchen Dreiecks bereits die Apolarität. Um diese Aussagen im weitesten Sinne, also auch für besonders gelegene oder singuläre Kegelschnitte aufrecht zu erhalten, bedarf es der Zulassung ausgearteter Dreiecke und einer genaueren Klärung der zugrunde liegenden Begriffe, wie dies der Verf. in zwei früheren Arbeiten (dies. *Zbl.* **41**, 474; **44**, 353) ausgeführt hat. In Fortsetzung dieser Untersuchungen und auf dieselben gestützt bringt nun die vorliegende Abhandlung weitere Verschärfungen. W. Wunderlich.

Ulčar, Jože: Über einen Satz aus der Theorie der affinen Einteilung der Flächen zweiter Ordnung. *Bull. Soc. Math. Phys. Macédoine* **3**, 9—13 u. deutsche Zusammenfassg. 13 (1952) [Mazedonisch].

Dias Agudo, Fernando Roldao: Eine neue Methode zum Studium ebener Schnitte von Flächen 2. Ordnung. *Univ. Lisboa. Revista Fac. Ci., II. Ser. A* **2**, 289—295 und französ. Zusammenfassg. 296 (1952) [Portugiesisch].

● **Spampinato, N.:** Lezioni di geometria superiore. Napoli: Pironti 1948—52.

Herrmann, Horst: Matrizendarstellungen in der Liniengeometrie des P_3 . *Collect. Math.* **5**, 227—239 (1952).

Es sei $A = |a_{ij}|$ ($i, j = 0, \dots, 3$; $a_{ii} = 0$ für $i = 0, \dots, 3$) eine schiefsymmetrische Matrix, $A' = -A$ ihre transponierte, \bar{A} ihre adjunkte Matrix. Setzt man

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ a_{32} & 0 & a_{03} & a_{20} \\ a_{13} & a_{30} & 0 & a_{01} \\ a_{21} & a_{02} & a_{10} & 0 \end{pmatrix},$$

so besteht für zwei schiefsymmetrische Matrizen A, B die Identität von W. Blaschke: $AB + BA = AB + BA = -(A \circ B) \cdot E$, wobei $(A \circ B) = \lambda_{12} = a_{01} b_{23} + \dots$ bedeutet [siehe

W. Blaschke, Projektive Geometrie, Berlin 1947 (dies. Zbl. **30**, 62), S. 93]. Auf Grund dieser Identität kann man den Matrizen A, B andere Matrizen mit bemerkenswerten Eigenschaften zuordnen, wie $C = AB - AB$, $D = A\bar{B} - BA$, $F = AB + B\bar{A}$, $G = \bar{A}B + \bar{B}A$, $H = AB - BA$, $K = AB - BA$. Drei schiefe Matrizen A, B, C ordnet Verf. in ähnlicher Weise 40 andere Matrizen zu. Eine weitere schiefe Matrix D führt mit A, B, C zu weiteren Matrixbildungen, insbesondere im Falle, daß D die Form $\alpha A + \beta B + \gamma C$ hat. Für A, B findet man die Invariante $\lambda_{12}^2/\lambda_{11}\lambda_{22}$. — Alle so hergestellten Matrizenidentitäten werden dann in der analytischen Geometrie des Raumes angewendet. Die Punkte und die Ebenen werden als einspaltige Matrizen x und u dargestellt; der durch zwei Punkte a, b bestimmten Geraden g wird die Geradenmatrix $g = (g_0, g_1, g_2, g_3)$, mit $g_i = b_i a - a_i b$, zugeordnet; die Grundbeziehungen der Geometrie der Lage dienen dann als Anwendungsbeispiele für den obigen Matrizenkalkül; es werden u. a. Kollineationen, Korrelationen, Liniengeometrie und insbesondere lineare Strahlenkomplexe untersucht.

E. Togliatti.

Burau, Werner: Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie. Collect. Math. **5**, 3—118 (1952).

Per le Parti I e II di questo lavoro vedasi questo Zbl. **41**, 474. L'A. proseguendo nello studio delle varietà fondamentali della geometria proiettiva, dedica la Parte III della sua memoria alle varietà di Grassmann $G_{n;k}$ rappresentanti gli S_k di S_n ; introduce le coordinate dei due tipi per i punti di dette varietà, stabilisce la razionalità di $G_{n;k}$ e l'esistenza su di essa di spazi lineari S_{n-k}^I (immagini degli S_k per uno S_{k-1} fisso) e di spazio S_{k-1}^{II} (immagini degli S_k contenuti in uno S_{k-1} fisso), ne dà una generazione ricorrente a partire da varietà di Grassmann di indici più bassi e determina insieme il sistema di relazioni quadratiche che la definiscono interamente. Si occupa poi in particolare delle $G_{n;1}$ esaminando dapprima i casi $n = 3, 4, 5, 6, 7$ e ottenendole poi in generale per proiezione dalle $S_{n;n}$ di Segre. Passa quindi alle $G_{2k+1;k}$ le quali presentano la particolarità di avere due schiere di spazi generatori formate entrambe da S_{k+1} e considera in special modo il caso $k = 2$ ($G_{5;2}$ di S_{19}) già trattato da C. Segre. L'A. dedica poi la Parte IV allo studio di certe varietà M_q i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con gli $\infty^{\binom{k-1}{2}}$ S_k di una delle schiere di una quadrica Q_{2k} di S_{2k+1} ; il caso $k = 3$ è noto e conduce ad una seconda quadrica M_6 ; il caso $k = 4$ che conduce a una M_{10} è nuovo e perciò viene trattato più estesamente, dovendo servire di modello per i successivi che vengono introdotti per ricorrenza. L'ultimo paragrafo è dedicato alla rappresentazione analitica delle M_q e in particolare alla M_{15} di S_{31} ($k=5$).

P. Buzano.

Jaglom, I. M.: Über die linearen Räume des symplektischen Raumes. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu **9**, 309—318 (1952) [Russisch].

The author studies the geometry under the symplectic group and he obtains the conditions for the equivalence of a pair of non-isotropic subspaces. Owing to the omission of the proof of the main result the reviewer sketches a proof for the most essential case here. We use the notation that if a linear subspace in the $2n$ -dim. symplectic space U is spanned by r independent vectors

u_1, u_2, \dots, u_r , then we write $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$. Evidently, U and AU , when A is a r -rowed invertible

matrix, denote the same subspaces. Let $J = \begin{pmatrix} 0 & I^{(n)} \\ -I^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$. Let U, V and U_1, V_1 be two pairs

of non-isotropic r -dim. subspaces and assume that U (resp. U_1) have non-zero vector in common with both V (resp. V^*) and V_1 (resp. V_1^*), when V^* denotes the conjugate subspace of V . We may choose the vectors in U, V, U_1, V_1 such that $UJU' = VJV' = U_1JU_1' = V_1JV_1' = F$

where $F = \begin{pmatrix} 0 & I^{(r/2)} \\ -I^{(r/2)} & 0 \end{pmatrix}$. If there is a symplectic transformation T such that $U_1 = AUT$ and

$V_1 = BVT$ when A and B are symplectic with respect to F , then $U_1JV_1' = AUJV'B$. Let $M_1 = U_1JV_1'$ and $M = UJV'$, then $MF M' = \lambda F$ and $M_1F M_1' = \lambda F$ have the

same elementary divisors. Conversely, suppose that, $MF M' = \lambda F$ and $M_1F M_1' = \lambda F$ have the same elementary divisors, then it is known that there exists a matrix A such that $A(MF M' - \lambda F)A' = M_1F M_1' - \lambda F$, where A is symplectic with respect to F and $AMFM'A' =$

$M_1F M_1'$. Thus $M_1 = AMB$, where B is symplectic with respect to F . Then $\begin{pmatrix} AU \\ BV \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} AU \\ BV \end{pmatrix}' =$

$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}'$. Consequently, then exists a symplectic transformation T such that $U_1 = AUT$

and $V_1 = BVT$; of course, we may obtain conditions for the equivalence of a pair of non-isotropic subspaces in the general case.

L. K. Hua.

Algebraische Geometrie:

Severi, Francesco: Le diverse concezioni di varietà nella geometria algebrica. Rend. Accad. naz. XL, Ser. IV 2, 155—181 (1952).

Besprechung dies. Zbl. 45, 239.

Segre, Beniamino: Arithmetical properties of algebraic varieties. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 1, 490—493 (1952).

Die klassischen diophantischen Probleme der algebraischen Geometrie sind, wie Verf. in dieser kurzen Übersicht zeigt, bedeutend verallgemeinert worden dadurch, daß man heute nach der Existenz von Lösungen algebraischer Gleichungen fragt, die einem vorgegebenen Körper beliebiger Charakteristik angehören. Besonders intensiv und teilweise mit Erfolg wurden kubische Kurven behandelt, ferner die linearen Räume auf irreduziblen Quadriken, sowie Fragen der Rationalität und Unirationalität (Severi-Brauer-Mannigfaltigkeiten). Bezüglich Einzelheiten wird auf das Buch des Verf. (Arithmetical questions on algebraic varieties, London 1951, dies. Zbl. 42, 152) verwiesen. W. Gröbner.

Conforto, Fabio: Problèmes résolus et non résolus de la théorie des fonctions abéliennes dans ses rapports avec la géométrie algébrique. Centre Belge Rech. math., 6ième Colloque Géom. algébrique, Liège, du 9 au 12 juin 1952, 89—110 (1952).

Questa conferenza offre un quadro completo sullo stato attuale della teoria delle funzioni abeliane, nelle sue relazioni con la geometria algebrica, delineando nettamente i problemi ancora insoluti. L'A., dopo aver ricordato come sia possibile uno sviluppo della teoria delle funzioni abeliane di p variabili in sede strettamente funzionale, sviluppo che conduce, attraverso il ben noto teorema di esistenza, al possesso di tutti i corpi K di funzioni abeliane (tale programma è stato realizzato dall'A. nel suo volume: „Funzioni abeliane e matrici di Riemann“, Roma 1942, questo Zbl. 28, 153), passa ad illustrare l'aspetto geometrico della teoria stessa. I rapporti delle funzioni abeliane con la geometria algebrica nascono associando ad ogni corpo K una varietà (algebraica) di Picard a p dimensioni V_p , birazionalmente definita (in modo che a corpi distinti siano associate V_p birazionalmente distinte), e danno origine ad una serie di problemi di grande interesse non ancora del tutto risolti. Tra questi: la dimostrazione di alcune presumibili caratterizzazioni delle V_p di Picard, come quella (geometrica, espressa da Severi) secondo cui le V_p sarebbero le sole varietà dotate di serie canoniche di ordine zero di tutte le dimensioni, e quella (topologica) che tenderebbe ad identificare topologicamente le V_p con i tori a $2p$ dimensioni reali; la classificazione birazionale delle varietà abeliane (trasformate razionali delle V_p) nel caso $p \geq 3$ (essa è nota per $p = 2$); lo studio delle varietà subordinate ad una V_p (problema, questo, illuminato da una memoria di Comessatti poco conosciuta); la classificazione birazionale delle varietà di Picard. Quest'ultimo è il più intimamente legato alla teoria delle funzioni abeliane, a tal punto che ha dato origine ad un suo nuovo indirizzo, che va sotto il nome di teoria delle funzioni abeliane modulari. Questa teoria, classica nel caso $p = 1$ (funzioni ellittiche modulari), solo di recente è stata sviluppata, in sede analitica, per $p > 1$ (Siegel, 1935) nel caso che i divisori elementari di un corpo K siano tutti uguali ad 1, ed è stata poi estesa dall'A. al caso di divisori qualunque in alcuni corsi da lui tenuti presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma, con il preciso intento anche di chiarirne il contenuto geometrico avvicinandola allo spirito della geometria algebrica (cfr. la recente opera dell'A.: „Funzioni abeliane modulari“, Roma 1951, questo Zbl. 45, 109). Il problema geometrico accennato ha come corrispettivo funzionale la costruzione di un insieme E i cui punti rappresentino biunivocamente senza eccezioni i corpi distinti di funzioni abeliane, e la sua soluzione nel caso di divisori qualunque (che è essenzialmente nuovo rispetto al caso dei divisori unitari) è stata portata a buon punto dall'A. attraverso uno studio approfondito del gruppo modulare ristretto relativo ad assegnati valori dei divisori elementari e del suo campo fondamentale di propria discontinuità, opportuna (ma non facile!) estensione rispettivamente del gruppo modulare e del triangolo modulare relativi al caso $p = 1$. Questa prima parte della teoria, che attende di essere perfezionata da ulteriori ricerche sui corpi K singolari, prelude a più ampi sviluppi che porteranno a definire e costruire le funzioni abeliane modulari, come funzioni analitiche uniformi dell'elemento variabile nell'insieme E , le quali si ridurranno a funzioni razionali di punto sopra un modello algebrico dell'insieme E , opportunamente interpretato. La presente relazione si chiude con un accenno a qualche problema collaterale e con una ampia bibliografia sull'argomento esposto. M. Rosati.

Andreotti, Aldo: Sopra il problema dell'uniformizzazione per alcune classi di superficie algebriche. Rend. Accad. naz. XL, Ser. IV 2, 111—127 (1952).

Verf. leistet hier einen sehr bemerkenswerten Beitrag zum Problem der Uniformisierung algebraischer Flächen im Großen, indem er einen in den Grundzügen von Poincaré und Picard

herrührenden Satz (Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, vol. II, Paris 1906, p. 465 sgg.) beweist und anwendet. Es sei $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer irreduziblen algebraischen Fläche, welche eine rationale (nicht notwendig birationale) Transformation $\tau: x' = R(x, y, z), y' = S(x, y, z), z' = T(x, y, z)$ in sich besitzt. Der Ursprung des Koordinatensystems werde in einem bei τ sich selbst entsprechenden Punkt gewählt. Aus $f(x, y, z) = 0$ berechnet man z als Funktion von x, y und setzt diese in die beiden ersten Gleichungen von τ ein. Bei passender Wahl der Koordinatenrichtungen erhält man so: $x' = a x + P(x, y), y' = b y + Q(x, y)$, wo P, Q Potenzreihen eines Untergrades ≥ 2 sind. Unter der Voraussetzung $|a| > 1, |b| > 1, a^n \neq b, b^n \neq a$ für $n = 2, 3, \dots$ löst Verf. das System von Funktionalgleichungen: $\varphi(au, bv) = a \varphi(u, v) + P(\varphi, \psi), \psi(au, bv) = b \psi(u, v) + Q(\varphi, \psi)$ mit Hilfe sukzessiver Approximationen und konstruiert so 3 meromorphe Funktionen $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = z(x, y) = \chi(u, v)$, welche die Flächengleichung $f(x, y, z) = 0$ und die Transformationsgleichungen τ identisch erfüllen, wenn $x' = \varphi(au, bv), y' = \psi(au, bv), z' = \chi(au, bv)$ gesetzt wird. — Verf. rechnet einige Beispiele explizit durch: Allgemeine Flächen 4. Ordnung, welche ein Paar sich schneidender oder windschiefer Geraden enthalten ($p_a = p_o = P_2 = P_3 = \dots = 1$) und die von Enriques untersuchte Fläche 6. Ordnung, welche doppelt durch die Kanten eines Tetraeders hindurchgeht ($p_o = 0, P_2 = 1, P_3 = 0$). Die durch diese Methode für die Parametrisierung neu erschlossenen Flächen sind unter den beiden Typen enthalten: Reguläre Flächen, deren Geschlechtszahlen sämtlich 1 sind, und Flächen der Irregularität q mit einem Büschel elliptischer Kurven des Geschlechtes q . W. Gröbner.

Andreotti, Aldo: *Sopra le varietà di Picard di una superficie algebrica.* Rend. Accad. naz. XL, Ser. IV 2, 129—137 (1952).

Einer algebraischen Fläche F , deren Irregularität $q > 0$ ist, können auf zwei verschiedene Weisen Picardsche Mannigfaltigkeiten zugeordnet werden: Einmal nach Severi, indem man von q einfachen Integralen 1. Gattung auf F ausgehend deren Periodenmatrix Ω bildet und die dieser Riemannschen Matrix entsprechende Picardsche Mannigfaltigkeit V_q einführt; andererseits kann man nach Castelnuovo die Bildmannigfaltigkeit V'_q der ∞^q linearen Systeme von Kurven betrachten, die in einem kompletten algebraischen System von Kurven auf F enthalten sind; V'_q ist wieder eine Picardsche Mannigfaltigkeit. Verf. beantwortet die Frage, in welcher Beziehung V'_q zu V_q steht, und zwar zeigt er, daß V'_q nichts anderes ist als die Bildmannigfaltigkeit der ∞^q linearen Systeme von Hyperflächen (genauer Schnitte mit Hyperflächen des Einbettungsraumes) der V_q , die in einem algebraischen (kontinuierlichen) System solcher Hyperflächen enthalten sind. Diese beiden Mannigfaltigkeiten sind insbesondere immer dann identisch, wenn die Divisoren der Riemannschen Matrix Ω alle 1 sind, oder wenn Ω eine komplexe Multiplikation zuläßt. Um dieses Resultat herzuleiten, studiert Verf. im ersten Abschnitt eingehend die Beziehungen zwischen einer Picardschen Mannigfaltigkeit und der zugehörigen Picardschen Mannigfaltigkeit der algebraischen Systeme ihrer Hyperflächen. Die Resultate können, wie Verf. in anderen Arbeiten auszuführen beabsichtigt, auch zur Klassifizierung der irregulären Flächen benützt werden. W. Gröbner.

Galafassi, Vittorio Emanuele: *Sulla base reale e sulla connessione delle rigate astratte reali.* Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 260—272 (1952).

En continuant ses recherches sur les surfaces réglées réelles (ce Zbl. 47, 147), l'A. établit entre l'ordre Z de connexion de la partie réelle de la surface, le nombre base ϱ (Picard-Severi) et le nombre ρ de la base réelle (Comessatti) l'égalité $Z = 2\varrho - \rho$. Il considère aussi des questions d'existence pour les surfaces traitées correspondant à des valeurs maxima pour Z et ϱ . G. Ancochea.

Galafassi, Vittorio Emanuele: *In tema di estensione della limitazione di Harnack.* Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 85, 375—382 (1952).

L'A. donne une borne supérieure pour le nombre des nappes réelles d'une variété algébrique réelle à dimension > 1 . Le résultat fait intervenir, à côté des invariants absolus (complexes), un caractère de la variété réelle (contrairement à ce qui se passe pour le théorème de Harnack pour les courbes où seul le genre intervient). G. Ancochea.

Hutcherson, W. R.: *Invariant curves of order eight.* Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 9, 13—14 (1952).

Etude des systèmes linéaires de courbes découpés sur une surface du 4^e ordre invariante pour une homographie H de période 11 (dont les équations ne sont pas données) et composés au moyen de l'involution déterminée par H . Il y en a 11. Etude du comportement d'un de ces systèmes aux points unis de l'involution.

L. Godeaux.

Godeaux, Lucien: Observations sur les points unis de seconde espèce et de troisième catégorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 1118—1124 (1952).

Le système classique introduit par l'A. pour étudier la structure d'un point de diramation d'une surface multiple, $l + \alpha m = 0$, $m + \beta l = 0 \pmod{p}$ possède si on pose $p = a\alpha + b$, $p = a' + \beta b'$ deux séries de solutions des types: $l'_i = (m + 1 - i)(h\beta - \alpha) - (m - i)b$, m'_i et $l''_i = (n + 1 - i)(k\beta' + 1) - (n - i)b'$, m''_i ; dans le cas où le cône tangent au point de diramation se décompose en quatre cônes rationnels, on a $m'_1 = m''_1$, $l'_1 = l''_1$, mais tous les autres couples sont distincts.

B. d'Orgeval.

Rosina, B. A.: Sopra una classe particolare di superficie algebriche. (Quadriche generalizzate.) Atti Accad. Sci. Ferrara 29, 2 p. (1952).

Les surfaces d'ordre $2n$ ayant à l'infini une conique C , n -ple généralisent les quadriques, du point de vue des propriétés diamétrales. Le discriminant et la nature de C permettent de généraliser les concepts de „propriété“ et de nature des quadriques. Les plans diamétraux passent par un même point, à l'infini dans le cas parabolique. Une quadrique généralisée elliptique ou hyperbolique possède en général 3 directions principales; les cas d'exception généralisent les quadriques de révolution et les sphères. Pour les paraboloides généralisés, il y a en général deux plans diamétraux principaux orthogonaux; il y a un faisceau de diamètres principaux si la surface possède une famille de sections „conique circulaire généralisée“. Un paraboloides généralisé de type parabolique possède un seul plan diamétral principal.

B. d'Orgeval.

Predonzan, Arno: Intorno ai sistemi di S_k che appartengono al monoide generale di dato ordine. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 278—292 (1952).

Die vorliegende Arbeit studiert die Systeme von S_k , die auf einem allgemeinen Monoid M_{r-1}^n von S_r liegen; die wichtigsten Ergebnisse sind folgende. Auf M ($n \geq 3$) liegen höchstens drei Familien von S_k ($k \leq 1$): 1) die Familie Σ_1 derjenigen S_k , die den $(n-1)$ -fachen Punkt O enthalten, 2) die Familie Σ_2 derjenigen S_k , welche auf S_{k+1} liegen, die den Punkt O enthalten, 3) die Familie Σ_3 derjenigen S_k , die weder in Σ_1 noch in Σ_2 liegen (Häufungselemente von Σ_3 können trotzdem in Σ_1 oder in Σ_2 liegen). Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 nicht leer sind; diese Bedingungen sind Ungleichungen des Typus $r \geq f(n, k)$. Σ_1 , Σ_3 können endlich oder unendlich sein; im zweiten Falle sind sie zwei algebraische Systeme, die im Körper der Koeffizienten von M irreduzibel sind; doch scheint es Ref., daß diese Eigenschaft auch im ersten Falle gilt, natürlich wenn das Monoid allgemein ist. Σ_2 ist dagegen immer unendlich und ein reines oder ein irreduzibles algebraisches System. Jedenfalls werden die Dimensionen D_1 , D_3 von Σ_1 , Σ_3 gegeben, und es wird bewiesen, daß $D_2 \leq D_1 + 1$ ist; es ist $D_2 = D_1 + 1$, sofern eine gewisse Ungleichung zwischen r, k, n gilt; unter derselben Bedingung gilt auch: $\Sigma_3 \supset \Sigma_2 \supset \Sigma_1$, $\Sigma_3 \neq \Sigma_2 \neq \Sigma_1$. — Der Beweis der Eigenschaften von Σ_1 , Σ_2 gründet sich darauf, daß einem S_k bzw. einem S_{k+1} durch den Punkt O ein S_{k-1} bzw. ein S_k entspricht, der auf dem Durchschnitt H von der Form M , von ihrem Tangentialkegel in O und von einer allgemeinen Hyperbene liegt; der Beweis der Eigenschaften von Σ_3 gründet sich auf die Kenntnis der Mannigfaltigkeiten F_{k-1}^n , die auf H liegen und einem S_k gehören.

M. Benedicty.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Pastori, Maria: Applicazioni di calcolo tensoriale. Matematiche 7, 21—54 (1952).

Es handelt sich um drei Kongreßvorträge, in welchen zunächst eine historische Skizze des Tensorkalküls gegeben wird. Im ersten § wird der Begriff des Tensors gebracht. Die weiteren Paragraphen enthalten: die Begriffe des Riemannschen Raumes, der kovarianten Ableitung, des Parallelismus von Levi-Civita, den kurzen Abriss der Theorie des linearen Zusammenhangs (von den neueren Resultaten wird die geometrische Deutung des Torsionsaffinors erwähnt, die von Bompiani 1951 gegeben worden ist) und einige geometrische Anwendungen. Der zweite Teil gibt Anwendungen auf die klassische Mechanik, Elastizitätstheorie und Hydrodynamik. Auch Anwendungen auf die Plastizitätstheorie werden berücksichtigt. Der dritte und letzte Teil der Arbeit bringt die Anwendungen des Tensorkalküls auf die Relativitätstheorie und Gravitationstheorie. Bei dieser Gelegenheit ist auch die letzte Einsteinsche Theorie vom Jahre 1950 mit den Resultaten von M. A. Tonnellat und V. Hlavatý besprochen. In den zitierten

Literaturangaben werden hauptsächlich die Arbeiten der italienischen Mathematiker berücksichtigt.
St. Golab.

Gurevič, G. B.: Über die Einbettung eines beliebigen linearen Systems von Polyvektoren oder symmetrischen Tensoren in ein vollständiges System. Mat. Sbornik, n. Ser. **30 (72)**, 225—232 (1952) [Russisch].

In einer früheren Arbeit (Gurevič, dies. Zbl. **36**, 21) wurde der n -dimensionale Vektorraum R_n in Stufenräume $R_{r_1} \subset R_{r_2} \subset \dots \subset R_{r_h}$ aufgeteilt, sowie eine zugehörige Stufenalgebra oder vollständige Algebra von Affinoren eingeführt, die alle Vektoren einer Stufe in solche nicht höherer Stufe transformieren. Die zugehörigen Affinoren A_x^h können nun auch gemäß der Vorschrift $A_{[x w_{ij\dots k}]_h}^h$ auf Multi-vektoren w angewandt werden, andererseits hat jedes Linearsystem \mathfrak{w} von Multi-vektoren eine zugehörige Algebra \mathfrak{A} , die \mathfrak{w} unverändert läßt. Verf. stellt sich nun die Aufgabe, ein gegebenes System \mathfrak{w} zu einem vollständigen System \mathfrak{w}^v zu erweitern, d. h. zu einem solchen, daß die \mathfrak{A} umfassende Algebra \mathfrak{M} von \mathfrak{w}^v im früheren Sinne eine vollständige Algebra ist. Er löst diese Aufgabe, indem er einen Prozeß einführt, der das gegebene System zu einem vollständigen erweitert. Mit leichter, sinngemäßer Abänderung gelten diese Definitionen und Überlegungen auch für Linearsysteme symmetrischer Tensoren.
W. Burau.

Gurevič, G. B.: Über eine Eigenschaft der Algebra eines beliebigen linearen Systems von Polyvektoren oder symmetrischen Tensoren. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu **9**, 223—229 (1952) [Russisch].

Wie in anderen Arbeiten spricht Verf. hier von der Algebra \mathfrak{A} aller Affinoren, die ein gegebenes lineares System von Polyvektoren \mathfrak{w} in sich überführen; weiterhin nennt er \mathfrak{Q} die Algebra aller Affinoren, die aus dem linearen Abschluß aller $w_{ij\dots kh} \tilde{w}^{ij\dots kh} x = L_x^x$ besteht, wobei $\tilde{w}_{ij\dots kh}$ der zu $w_{ij\dots kh}$ aus \mathfrak{w} senkrechte Polyvektor ist. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich dann wesentlich mit dem Durchschnitt $\mathfrak{F} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{A}$. Von dieser Algebra \mathfrak{F} wird gezeigt, daß sie eine sog. Nullalgebra ist, d. h. daß die sämtlichen charakteristischen Zahlen ihrer Matrizen verschwinden. Das gleiche wird auch gezeigt von dem analog für Linearsysteme symmetrischer Tensoren gebildeten Affinorensystem.
W. Burau.

Gurevič, G. B.: Über eine gewisse lineare Gleichung für einen Trivektor. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu **9**, 230—235 (1952) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit der Lösung des Systems $w_{ijk} v_{xy} [a v_{bc} x] = 0$, worin v ein gegebener und w ein gesuchter Trivektor ist. Es ergibt sich nach einigen Rechnungen, daß nur dann eine nicht-triviale Lösung dafür vorhanden ist, wenn v sich entweder in der Gestalt $v = [a q r] + [b r p] + [c p q]$ oder $v = [a p q] + [b p r] + [c p s] + [q r s]$ schreiben läßt.
W. Burau.

Fulton, C. M.: Weierstrass tensors. Amer. math. Monthly **59**, 544—547 (1952).

In einem 4-dimensionalen euklidischen Raume stellt die Gleichung (1) $\sum x_i x_i = 1$ eine 3-dimensionale Einheitshyperkugel K_3 dar. Die der Bedingung (1) unterworfenen Koordinaten x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) können als spezielle Koordinaten der K_3 angesehen werden und werden vom Verf. Weierstraßsche Koordinaten genannt. Weierstraßsche Tensoren sind dementsprechend Tensoren mit gewöhnlicher Transformationsregel der Komponenten beim Übergang von einem Weierstraßschen Koordinatensystem zu einem anderen von demselben Typus. Für ein Skalarfeld U definiert der Verf. den Gradienten (die kovariante Ableitung) durch $V_h U = \partial_h U - \sum_j x_h x_j \partial_j U$ ($\partial_j = \partial/\partial x_j$). In analoger Weise werden Tensoren von höherer Ordnung definiert. Verf. behauptet (ohne den Beweis zu geben), daß in K_3 die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie bestehen und daß unter geringen Komplikationen die Betrachtungen auf den Fall der elliptischen Geometrie übertragen werden können. Der Fall des hyperbolischen Raumes dagegen bietet einige rechnerische Schwierigkeiten.
St. Golab.

Mira Fernandes, A. de: Grandezze pseudo-estensoriali nella geometria differenziale d'ordine superiore. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A **2**, 361—380 (1952).

Anschließend an die Arbeit von A. Kawaguchi über Extensoren (dies. Zbl. 23. 169; 24, 355) definiert Verf. Pseudo-Extensoren. Es zeigt sich, daß sich aus Extensoren mittels des Operators S^H Pseudo-Extensoren bilden lassen. *J. Haantjes.*

Thüring, R.: Studien über den Holditchschen Satz. Verhdl. Naturforsch. Ges. Basel 63, 221—252 (1952).

Werden die Endpunkte A, B einer Strecke der festen Länge L auf einer ebenen konvexen Kurve R gerade einmal (Drehzahl = 1) derart herumgeführt, daß sie wieder in ihre Ausgangslage zurückkehren, so spricht Verf. von einer Holditchschen Bewegung und zeigt: Hinreichend für eine solche Bewegung ist $L < A$ und notwendig ist $L \leq A$, wobei A die Minimalbreite von R bedeutet. Ferner wird die Eindeutigkeit der Bewegung untersucht, die dadurch erklärt wird, daß jeder Richtung eine und nur eine Sehnenlage entspricht. Für die Doppelpunktfreiheit der Bahn eines Punktes C der Strecke AB ist hinreichend $L < A$, falls C außerhalb der Strecke AB liegt, und $L < 2r$, wenn C zwischen A und B gewählt wird, wobei $2r$ der maximale Durchmesser eines Inkreises von R ist. Für eine stetig gekrümmte Eilinie mit nur 4 Scheiteln erübrigt sich diese Fallunterscheidung, da $A = 2r$ ist. Weiter werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Monotonie unserer Bewegung ermittelt, d. h. dafür, daß die Punkte A und B die konvexe Kurve R monoton (ohne Rückläufigkeit und stationäre Lagen) beschreiben. Die Bedingungen für die Monotonie, Doppelpunktfreiheit und Konvexität der Bahnkurve von C werden nur für Sonderfälle behandelt. Endlich werden noch stetig gekrümmte Eilinen R in Betracht gezogen und für solche eine weitere hinreichende Bedingung für die Doppelpunktfreiheit der Bahn von C gegeben, falls C zwischen A und B liegt. Die Diskussion einiger Beispiele beschließt die Arbeit.

H. R. Müller.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Grove, V. G.: Über verallgemeinerte Krümmungen. Univ. nac. Tucumán, Revista, Ser. A 9, 47—55 (1952) [Spanisch].

Sopra una superficie dello spazio ordinario, descritta dal punto $x^i(u^1, u^2)$ si consideri una famiglia di curve (C) data mediante l'equazione $du^1: du^2 = \xi^1: \xi^2$ essendo $\xi^\alpha(u^1, u^2)$ un vettore unitario tangente. In un punto x della superficie siano K_n la curvatura normale nella direzione ξ^α e K_g la curvatura geodetica nella stessa direzione; siano inoltre N il vettore unitario normale in x alla superficie e η^α il vettore unitario tangente ed ortogonale a ξ^α . Si assegni per ciascun punto x della superficie una direzione λ (non tangente) mediante l'angolo φ che essa forma con N e la sua proiezione θ^α sul piano tangente. L'A. considera allora lo scalare K_λ e il vettore unitario tangente ζ^α tali che: $K_\lambda \zeta^\alpha + (K_n \operatorname{tg} \varphi) \theta^\alpha = K_g \eta^\alpha$ e chiama K_λ curvatura relativa e ζ^α vettore di curvatura relativa della curva C passante per x . La curvatura relativa si annulla quando la direzione λ coincide con quella della normale principale alla curva C . Lo scalare $K_u = K_\lambda \eta^\rho \zeta^\rho$ è la curvatura della proiezione obliqua di C nella direzione λ sul piano tangente: per particolari scelte di λ si ottengono la curvatura assiale di C . E. Springer [Bull. Amer. Soc. 51, 686—691 (1945)] e le curvature ipergeodetica e supergeodetica di H. B. Dekker (questo Zbl. 35, 375; 43, 157).

P. Buzano.

Gheorghiev, Gh.: Sur quelques généralisations du théorème de Réaumur pour les courbes d'une surface. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti., Sect. Mat., Fiz. 4, 497—501 u. russische u. französ. Zusammenfassgn. 501—502, 502—503 (1952) [Rumänisch].

Soient en chaque point M d'une courbe (C), située sur une surface S , trois droites A_1, A_2, A_3 , tangentes à S . Soient M_1, M_2, M_3 les adjoints de M resp. sur chacune des trois droites (tels que les tangentes aux courbes décrites par ces points soient situées dans les plans normaux à S par les droites respectives). Les plans normaux à A_1 et A_3 en M_1 et M_3 coupent A_2 en μ_1, μ_3 . L'A. étudie certaines problèmes qui se posent à propos de cette figure. En posant $(MM_2 \mu_1 \mu_3) = k$, il obtient

$$(1) \quad [\cos(\varphi_2 - \varphi_3)/\sin \varphi_3] (G_1 + \partial \varphi_3 / \partial s_1) - k [\cos(\varphi_2 - \varphi_1)/\sin \varphi_2] (G_1 + \partial \varphi_1 / \partial s_1) \\ = (1 - k) (G_1 + \partial \varphi_2 / \partial s_1) / \sin \varphi_2$$

où G_1 est la courbure géodésique de (C) en M et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les angles faits par les droites A_1, A_2, A_3 , avec la courbe. En supposant d'abord que les directions de ces droites ne dépendent pas de G_1 (le coefficient de G_1 dans (1) est nul), il résulte des généralisations de certains résultats obtenus récemment par M. A. Mjöller A cad. Republ. popul. Române, Fil. Iaşi, studii Cerc. ştii. 2, 19—24 (1951)]. Si

les mêmes directions ne dépendant pas de k on obtient une généralisation d'un théorème de Réaumur. Dans la deuxième partie du travail, l'A. obtient des résultats analogues en considérant deux congruences de droites, l'une incidente, l'autre reflétée par une surface en M , les points focaux sur chaque rayon, les plans normaux aux rayons dans les points focaux et les intersections H' , H'' , de ces plans avec la normale à la surface. *M. Haimovici.*

Peterson, K.: Über die Verbiegung von Flächen. Dissertation zur Erlangung des Grades eines Kandidaten. Istoriko-mat. Issledovanija 5, 87—112 (1952) [Russisch].

Rossinskij, S. D.: Kommentare zur Dissertation K. M. Petersons „Über die Verbiegung von Flächen“. Istoriko-mat. Issledovanija 5, 113—133 (1952) [Russisch].

Vidal Abascal, E. und E. G. Rodeja F.: Note über Kurven auf Flächen konstanter Krümmung. Collect. Math. 5, 331—337 (1952) [Spanisch].

Auf einer Fläche F von festem Krümmungsmaß K bewege sich ein geodätisches Dreieck so, daß zwei seiner Ecken dieselbe geschlossene Linie C von F umlaufen. Wenn dann die dritte Ecke des Dreiecks wieder eine geschlossene Linie C' von F umläuft, wird für den von C' umschlossenen Flächeninhalt eine Formel angegeben, die die von Steiner für den Inhalt von Parallelkurven als Grenzfall umfaßt.

W. Blaschke.

Bers, Lipman: Singularities of minimal surfaces. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 157—164 (1952).

Zusammenstellung von Resultaten des Verf. [dies. Zbl. 43, 159; J. Analyse math. 1 (1951)]. Im letzten Abschnitt werden nichtlineare, partielle Differentialgleichungen diskutiert, die zur Theorie der pseudo-analytischen Funktionen die gleiche Beziehung haben, wie die Differentialgleichung der Minimalflächen zur Theorie der analytischen Funktionen.

A. Kriszten.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

McDonald, Janet: Davis's canonical pencils of lines. Pacific J. Math. 2, 209—218 (1952).

Ist auf einer Fläche ein konjugiertes Netz gegeben, so gibt es ∞^2 Flächen II. Grades Q , die in einem Punkt P beide Netzkurven in 3. Ordnung berühren. Verf. definiert eine Schar von Geraden $g_1(k)$, die nicht in der Tangentenebene des Netzes liegen, und ordnet jeder Geraden $g_1(k)$ die Polare $g_2(k)$ bezüglich der Lie- F_2 zu. Eine allgemeine geometrische Deutung von $g_1(k)$ wird nicht gegeben; die $g_1(k)$ liegen in dem I. kanonischen Büschel von Davis (Diss., Chicago 1932). Die Polaren von $g_2(k)$ bezüglich des Bündels Q bilden Kegel, die sämtlich durch die Achse $g_1(1)$ des konjugierten Netzes gehen. Es folgen weitere Sätze über die Beziehung der Geradenscharen g_1 , g_2 zu den kanonischen Elementen von Davis. *W. Haack.*

Arghiriade, Em.: Sur les surfaces de Čech. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Ști., Secț. Ști. Mat. Fiz. 4, 85—97, russ. und französ. Zusammenfassgn. 97—98, 98—99 (1952) [Rumänisch].

L'A. étudie les surfaces ayant les courbes de Darboux planes, surfaces qu'on appelle surfaces de Čech. On peut classer les surfaces de Čech en trois espèces. E. Čech a démontré le théorème suivant (v. Fubini-Čech, Geometria proiettiva differenziale, Bologna 1926, p. 167): Pour les surfaces de première espèce S_1 , les plans des lignes de Darboux enveloppent trois cônes quadratiques F_i ($i = 0, 1, 2$) ayant leur sommets O_i collinéaires. Ces trois cônes, deux par deux, sont en perspective et les trois plans de ces perspectivités passent par une même droite et rencontrent la droite $O_i O_j O_k$ en trois points, qui engendrent le covariant cubique des trois sommets. — On montre dans les §§ 3 et 5 que cette affirmation de Čech n'est pas fondée: ces cônes ne sont jamais quadratiques pour les surfaces de première espèce. Dans le § 4 on démontre une propriété que l'A. croit nouvelle: Les cônes circonscrits à la surface S_1 ayant les sommets aux points O_i touchent la surface S_1 suivant des courbes planes C_i ; les plans des courbes C_i sont les trois plans des perspectivités de Čech. — Čech a démontré que pour les surfaces de seconde

espèce l'un des cônes, Γ_0 , se réduit à un faisceau de plans. On démontre dans les §§ 7 et 8 une propriété nouvelle: pour une telle surface les cônes Γ_1 et Γ_2 coïncident. — Pour les surfaces de troisième espèce, S_3 , Čech a établi que les plans des lignes de Darboux appartiennent à trois faisceaux, Γ_i ($i = 0, 1, 2$) et que les plans des lignes de Segre appartiennent aussi à trois faisceaux Σ_i ($i = 0, 1, 2$). L'A. a démontré dans les §§ 9 et 10 la propriété suivante, qu'il croit nouvelle: Les axes des trois faisceaux Γ_i forment un triangle $O_0 O_1 O_2$. S_3 est une surface de coïncidence et ses droites canoniques coïncidentes passent par un point fixe P , qui n'appartient pas au plan du triangle $O_0 O_1 O_2$. Les axes des trois faisceaux Σ_i sont justement les droites PO_i . Le tétraèdre $PO_0 O_1 O_2$ est le tétraèdre des axes. Autoreferat.

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur une classe des surfaces. II. Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 3, 499—519 u. russ. und französ. Zusammenfassg. 519—523, 523—527 (1952) [Rumänisch].

(Pour le 1^{er} pt. voir ce Zbl. 41, 491.) On considère des couples de surfaces S, S' décrites par les points (x) et (x') qui ont les propriétés suivantes: ils sont en correspondance asymptotique, (x) se trouve sur la quadrique de Lie de (x') et inversement, les tangentes asymptotiques $x x_u, x x_v$ se rencontrent respectivement avec $x' x'_u, x' x'_v$, S et S' sont applicables. En tenant compte aussi des résultats obtenus précédemment par l'A. il en résulte que les surfaces (S) ainsi considérées, ont la propriété de conserver un plan fixe π et un point fixe O , donc on peut les étudier aussi du point de vue centro-affin. Elles sont de trois catégories: I. Surfaces de Tzitzeica, II. Surfaces de Mayer, III. Surfaces que l'A. appelle (S_2) . On obtient cette distinction des surfaces (S) en projetant de O le point μ de (S) dans le point m de π et en prenant l'intersection (C) de la quadrique de Lie de μ avec π . Le point m décrit un réseau plan et soient m_1 et m_{-1} ses transformées de Laplace. Pour une surface (S) la droite $m_1 m_{-1}$ est la polaire de m par rapport à (C) . Dans le cas des surfaces de Tzitzeica m_1 et m_{-1} sont sur (C) et dans le cas des surfaces de Mayer un des points m_1, m_{-1} est sur (C) . Comme méthode de recherche des propriétés projectives des surfaces (S) , on suppose la surface non réglée et rapportée à ses asymptotiques, donc les coordonnées x sont solutions des équations

$$x_{uu} = p x + \theta_u x_u + \beta x_v, \quad x_{vv} = q x + \gamma x_u + \theta_v x_v.$$

Quant au point x' de la quadrique de Lie, il a la représentation paramétrique

$$x' = \left\{ \frac{1}{2} (h - \theta_v) (k - \theta_u) - \frac{1}{2} N \right\} x + \frac{1}{2} (h - \theta_v) x_u + \frac{1}{2} (k - \theta_u) x_v + x_{uv},$$

où h et k sont deux fonctions invariantes qu'on détermine ultérieurement et $N = \theta_{uv} + \beta \gamma$. Parmi les propriétés des surfaces (S) on peut citer aussi la suivante: La droite $x x'$ passe par un point fixe O et la droite qui unit les points de rencontre des tangentes asymptotiques, reste dans un plan fixe π . Le point O' de rencontre de $x x'$ avec π est le conjugué harmonique de O par rapport aux points x, x' . G. Vranceanu.

Vagner, V. V.: Die allgemeine affine und zentral-projektive Geometrie der Hyperflächen im zentral-affinen Raume und ihre Anwendungen auf die geometrische Theorie der Transformationen von Carathéodory in der Variationsrechnung. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 75—145 (1952) [Russisch].

Führt man im zentralaffinen Raum E_n mit dem Zentrum O eine Eichhyperfläche F_{n-1} ein, die von der allgemeinen Zentralgeraden OQ nur in einem Punkt Q getroffen wird, so kann man $q(P) = PQ/OQ$ den geichichten Abstand des Punktes P auf der Geraden OQ von F_{n-1} nennen. Bildet man die Abstände zwischen allen Punkten einer m -dimensionalen Teilmannigfaltigkeit M_m : $x^\alpha = l^\alpha(\eta^i)$ und den Punkten von F_{n-1} , so ist dieser natürlich eine Funktion von η^1, \dots, η^m . Verschwindet diese Funktion für einen Punkt P mitsamt allen Ableitungen bis zur k -ten, so heißt dies: M_m und F_{n-1} berühren sich in P von der Ordnung k . Die $k+1$ -ten Ableitungen von q in P , die nicht mehr durchweg verschwinden sollen, bilden dann den sog. „Deviationstensor“. Z. B. ist der Fundamentaltensor g_{ab} von F_{n-1} der Deviationstensor in bezug auf die Tangentialhyperebene von F_{n-1} in P . Wie stets bei der zentralaffinen Geometrie (vgl. dazu auch Vagner, dies. Zbl. 41, 296) lassen sich alle diese Begriffe dualisieren: statt von der F_{n-1} wird von einer ∞^{n-1} -Gesamtheit von Hyperebenen gesprochen, die man wieder als Eichgebilde für andere Mengen von Hyperebenen einführen kann. Aus dem Deviationstensor lassen sich Tensordichten bilden, die auch bei der projektiven Gruppe invariant sind. Es werden dann auch die sog. Darboux-quadriken eingeführt, das sind Quadriken einer einparametrischen Schar, die man in jedem Punkt einer Hyperfläche erklären kann und die dort in mindestens 2. Ordnung berühren. Für sie sind der Deviationstensor 3. Ordnung und die daraus gebildeten Dichten wichtig. Eine der Darboux-quadriken, deren Mittelpunkte die Affinnormale bilden, ist die aus dem Dreidimensionalen wohl-bekannte Liequadrik. Durch Betrachtung der Affinnormalenkongruenz ergeben sich auf jeder Affinnormalen $n-1$ Krümmungszentren P_i sowie ein sog. „Zentrum C der mittleren Affin-krümmung“, das sich aus
$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{PC}{PP_i} = 1$$
 errechnet. Völlig dual dazu gibt es einen in der Berührungshyperebene von P gelegenen zentralprojektiven Normalenraum Z_{n-2} mit einer dem

Punkt C entsprechenden „Hyperebene der mittleren zentralprojektiven Krümmung“ durch Z_{n-2} . Der Mittelpunkt der Liequadrik fällt mit C zusammen. Weiterhin wird in § 6 ein vollständiges Invariantensystem für eine Hyperfläche des E_n angegeben in Gestalt einer zweistufigen Tensordichte sowie eines 3-stufigen affinen Zusammenhanges, die beide auf einem X_{n-1} vorzugeben sind, und wobei der affine Zusammenhang noch bestimmte Bedingungen zu erfüllen hat. Die Hyperfläche ist dann aber auch bis auf allgemeine affine Transformationen bestimmt; dual dazu ist das Hüllgebilde von Hyperebenen durch ganz entsprechende Angaben bis auf zentralprojektive Transformationen festgelegt. Es schließt sich die Behandlung der Sphären an, wovon es wieder dual zueinander einen affinen und einen zentralprojektiven Typus und die zu beiden Typen gehörigen zentralaffinen Sphären gibt. Der letzte Abschnitt enthält noch einige besondere Ausführungen über Kurven, insbesondere bei $n = 2$, wobei sich einiges aus der allgemeinen Theorie vereinfacht, andererseits aber notwendig gesondert formuliert werden muß.

W. Burau.

Togliatti, Eugenio: Sulla geometria intrinseca di un gruppo continuo di trasformazioni. Rend. Sem. mat. fis. Milano **22**, 90—102 (1952).

È ben noto come anche i vari indirizzi di Geometria differenziale possano inquadarsi nel „Programma di Erlangen“ di F. Klein. Un tale atteggiamento conduce a costruire in modo intrinseco la geometria differenziale di un qualsiasi gruppo di trasformazioni, come hanno mostrato G. Pick e G. Kowalewski in una lunga serie di lavori che culminano nel trattato del Kowalewski del 1931, al quale fa seguito il trattato di E. Cartan del 1937, ove lo stesso metodo è ripreso ed esposto in modo generale come „metodo del riferimento mobile“. — Ad illustrazione di tutto ciò l'A., nella sua conferenza, limitandosi per brevità alla geometria del piano, reca l'attenzione sulla geometria differenziale affine, non trascurando però enunciati di fatti generali.

V. E. Galafassi.

Slebodziński, W.: Sur les déformations de l'espace basé sur le groupe $x = hx + a$, $\bar{y} = kx + h^m y + b$. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, dédié à H. Steinhaus, 231—237 (1952).

Durch die auf den E_2 wirkende 4-gliedrige Gruppe $\bar{x} = hx + a$, $\bar{y} = kx + h^m y + b$ wird nach E. Cartan (Problème général de la déformation, C. r. Congr. Inter. Math. Strasbourg 1920, p. 397—406) die Deformationsgruppe Γ : $\bar{x} = \varphi(x)$, $\bar{y} = \psi(x) + \varphi'(x)$ im E_2 induziert, wobei $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ „willkürliche“ Funktionen sind. Während eine einzige Kurvenschar keine Invarianten unter Γ besitzt, ist dies im allgemeinen anders bei einer durch $dy/dx = f(x, y)$ definierten Kurvenschar (F) . Die Invarianten niedrigster Ordnung lauten (wenn wir uns auf den Fall $f_{yy} \neq 0$ beschränken): $I_1 = (f_{yyy})^{1/(2m+1)} (f_{yy})^{-1/(m+1)}$ und $I_2 = (M_{yy} - f_y f_{yy}) (f_{yy})^{-(m+2)/(m+1)}$ mit $M = f_x + f f_y$. Diese Invarianten 3. Ordnung charakterisieren (F) . Es wird ein Verfahren zur Bestimmung aller Invarianten gegebener Ordnung angegeben.

W. Klingenberg.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Łopśie, A. M.: Ein algebraisches Problem der Theorie der Riemannschen Räume erster Klasse. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu **9**, 462—490 (1952) [Russisch].

Bekanntlich ist nach Levi-Civita dafür, daß ein Riemannscher Raum der Klasse 1 hat, notwendig und hinreichend die Existenz eines symmetrischen Tensors a_{ij} , mit Hilfe dessen der Krümmungstensor in der Gestalt $K_{iklm} = a_{il} a_{km} - a_{im} a_{kl}$ geschrieben werden kann. Mit dem Problem, ein System von Bedingungen anzugeben, die ein Raum erfüllen muß, damit sein Krümmungstensor sich so schreiben läßt, haben sich Weise (dies. Zbl. **10**, 274) und Thomas (dies. Zbl. **15**, 273) beschäftigt, es jedoch nach Ansicht des Verf. noch nicht völlig gelöst. In der vorliegenden Arbeit werden zwei verschiedene Lösungen des Problems angegeben, eine, die metrisch genannt wird und eine zweite, die affin heißt. Der Unterschied besteht natürlich darin, daß die metrische Lösung wesentlich die g_{ik} benutzt, die andere nicht. Kennzeichnend für die besondere Art des Verf., zu arbeiten, ist ferner die Benutzung von formentheoretischer Symbolik an Stelle der sonst meist üblichen Indexschreibweise, was das Verständnis der umfangreichen Reihe von Bedingungen, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden muß, vielleicht etwas erschwert.

W. Burau.

Rham, Georges de: Intégrales harmoniques et théorie des intersections. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 209—215 (1952).

Mit Hilfe des Begriffs der Strömung (courant) in einer unendlich oft differenzierbaren, kompakten, orientierbaren, n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M , den der Verf. kurz erläutert, wird eine Integralformel für den Kroneckerschen Index zweier Ketten c^p und c^{n-p} angegeben. Hat M eine Riemannsche Metrik, so kann das skalare Produkt zweier Strömungen unter gewissen Voraussetzungen definiert und der fragliche Index unter Verwendung der Theorie der harmonischen Integrale in der Gestalt $(*c^p, c^{n-p})$ geschrieben werden, wobei $*c^p$ die zu c^p adjungierte Strömung ist. Hieraus resultiert eine weitere Darstellung des Index als Differenz zweier über c^p und c^{n-p} erstreckter Doppelintegrale einer lediglich durch die Metrik in M bestimmten Doppelform $g(x, y)$, die für $x \neq y$ als Funktion von x harmonisch vom Grade p und als Funktion von y harmonisch vom Grade $n - p$ ist.

K. Krickeberg.

Lichnerowicz, A.: Courbure, nombres de Betti, et espaces symétriques. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 216—223 (1952).

Un p -tenseur antisymétrique $T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}$ est dit harmonique si la forme différentielle associée $T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p} dx^{\beta_1} \dots dx^{\beta_p}$ est harmonique. L'A. étudie d'abord les conséquences de l'existence, sur une variété compacte et orientable proprement Riemannienne V_n , d'un tenseur symétrique $T_{\alpha\beta}$ dont l'une des dérivées covariantes est nulle; puis il établit une formule liant le Laplacien ΔT^2 du carré scalaire d'un tenseur harmonique T à la courbure de l'espace. Du fait que, sur V_n , ΔT^2 ne peut être partout ≥ 0 sans être nul, l'A. déduit dans divers cas la non-existence de p -tenseurs harmoniques sur V_n , et, par conséquent, la nullité du $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de V_n . Une formule analogue pour le Laplacien du carré du tenseur de courbure lui donne des conditions nécessaires et suffisantes nouvelles pour qu'un espace compact soit symétrique. Application aux espaces récurrents.

Jacqueline Lelong.

Mishra, R. S.: Congruence of curves through points of a hypersurface. Ganita **3**, 37—40 (1952).

Die Arbeit stellt eine Fortführung einer früheren Arbeit dar [R. Behari-R. S. Mishra, Proc. nat. Inst. Sci. India **15**, 85—92 (1949)]. Verf. betrachtet in einem Riemannschen Raum V_{n+1} einen V_n und außerdem eine Kongruenz von Kurven. In bezug auf diese Kongruenz werden die verallgemeinerten Gleichungen von Gauß und Mainardi-Codazzi aufgestellt, welche mit den letzten zusammenfallen, falls die Kongruenz in bezug auf den V_n normal ist.

St. Golab.

Mishra, R. S.: A set of $(M - N)$ congruences of curves through points of a subspace V_n of a Riemannian V_m . Ganita **3**, 95—102 (1952).

In einen Riemannschen Raum V_m sei ein Riemannscher Unterraum V_n ($n < m$) eingebettet. Verf. betrachtet $p = m - n$ Kurvenkongruenzen in V_m , so daß durch jeden Punkt des V_n p Kurven gehen (eine einzige aus jeder Kongruenz). In bezug auf diese Kongruenzen werden für die V_n die verallgemeinerten Krümmungslinien definiert, welche sich auf die üblichen Krümmungslinien reduzieren, falls alle Kongruenzen zu V_n orthogonal sind. In ähnlicher Weise werden die verallgemeinerten konjugierten Richtungen definiert und folglich auch die verallgemeinerten asymptotischen Richtungen.

St. Golab.

Szmydt, Z.: Un théorème de M. Knebelman. Prace mat.-fiz. **48**, 101—103 (1952).

Es seien in einem n -dimensionalen Raum zwei Finslersche Metriken mit Hilfe von Grundfunktionen $F(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ und $\bar{F}(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ gegeben. Setzt man $g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \partial^2 F^2 / \partial p^i \partial p^j$, so bekommt man die g_{ij} im allgemeinen als Funktionen von x_j und p_j . Knebelman hat bewiesen [Proc. nat. Acad. Sci. USA **15**, 376—379 (1929)], daß die Beziehung $g_{ij} = \varrho g_{ij}$ die Unabhängigkeit des Faktors ϱ von p_j nach sich zieht. Der Beweis von Knebelman setzt die Existenz der Ableitungen dritter Ordnung der Funktionen F und \bar{F} in bezug auf die p_i voraus.

Für $n = 2$ (in welchem Falle der Beweisgang von Knebelman versagt, wie A. Nazim bemerkt hat) hat Ref. den Beweis unter der Voraussetzung der zweiten stetigen Ableitungen gegeben. Die Verf. gibt einen einfachen Beweis des Knebelman'schen Satzes an im allgemeinen Falle $n \geq 2$ unter Voraussetzung der Stetigkeit der zweiten Ableitungen.

St. Golab.

Aussem, M. V.: Die Geometrie eines Doppelintegrals im dreidimensionalen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 253—255 (1952) [Russisch].

Le but du travail est de construire la géométrie de l'intégrale $\iint F(x, y, z, p, q) \cdot [dx dy]$ calculée sur la surface $z = f(x, y)$, $p \equiv \partial f / \partial x$, $q \equiv \partial f / \partial y$, par la méthode de Laptev et Vasiliev concernant la construction des espaces généralisés. En écrivant l'intégrale sous la forme $\iint [w^1 w^2]$ où w^1, w^2 sont des formes linéaires dans dx, dy et où $w^3 = dz - p dx - q dy$ et en utilisant les formules de structure de Cartan $Dw^I = [w^K w_K^I]$ ($I, K = 1, 2, 3$) et leurs prolongements, l'invariance de l'intégrale nous donne

$$w_1^1 + w_2^2 = a_1 w^1 + a_2 w^1 + a_3 w^3 + b^1 w_1^3 + b^2 w_2^3.$$

On interprète cette relation comme l'équation d'une hypersurface dans l'espace à six dimensions et l'on donne une interprétation géométrique des invariants de cette hypersurface, en montrant que par des réductions canoniques convenables, on peut supposer a_1, a_2, a_3, b^1, b^2 nuls.

G. Vranceanu.

Tonooka (Tonowoka), Keinosuke: Geometrical treatment of an $(n-1)$ -ple integral. Tensor, n. Ser. 2, 108—122 (1952).

The author considers an $(n-1)$ -ple integral

$$S = \int_{(n-1)} F(x^i, p_{\alpha(1)}^i, \dots, p_{\alpha(m)}^i) du^1, \dots, du^{n-1}$$

extended over a hypersurface defined by $x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$ in an n -dimensional space, where $p_{\alpha(1)}^i = \partial x^i / \partial u^\alpha$, $p_{\alpha(2)}^i = \partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta$ etc. To geometrize the space endowed with such an integral as the structure he tries to find out a metric tensor, parameter of the connexion etc. which i) are constructed from F and its successive partial derivatives with respect to $x^i, p_{\alpha(1)}^i, \dots$, and ii) are invariant under parameter transformations. For example he could find a metric tensor g_{ij} so that it satisfies $F_2 = \det |g_{ij} p_{\alpha}^i p_{\beta}^j|$ (then S takes the same form as in Riemannian case).

S. Sasaki.

Varga, Ottó: Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 147—162, ungarisch 131—146, russische Zusammenfassung. 146 (1952).

In der Mannigfaltigkeit der Linienelemente einer X_n sei eine symmetrische Übertragung gegeben, wozu die $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x, v)$ und ein Affinor $C_{\alpha\beta}^{\dots\gamma}$ erforderlich sind (Varga, dies. Zbl. 36, 385). Es werden Normalkordinaten eingeführt, die von den Douglasschen [Ann. of Math., II. Ser. 29, 143—168 (1928)] verschieden sind und eine einfache geometrische Bedeutung haben. Die mit Hilfe dieser Normalkordinaten definierten Normalaffinoren ermöglichen die Aufstellung eines Reduktionssatzes. Die Normalaffinoren lassen sich durch den Hauptkrümmungsaffinor, den Affinor $C_{\alpha\beta}^{\dots\gamma}$ und die kovarianten Ableitungen dieser beiden ausdrücken. Die sich ergebenden Zusammenhänge des Hauptkrümmungsaffinors und seiner kovarianten Ableitungen stehen in Beziehung zu den schon von E. Cartan (Les espaces de Finsler, Paris 1934, dies. Zbl. 8, 418) in der Finslerschen Geometrie vorgefundenen.

J. A. Schouten.

Egorov, I. P.: Bewegungen in Räumen von affinem Zusammenhang. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 693—696 (1952) [Russisch].

The author continues here his researches about the motions in an affinely connected space A_n , with non-zero curvature, and without torsion. His main results are the following ones: 1. An A_n , not equi-affine, with maximal mobility, admits a transitive complete group of motions exactly of order $n^2 - n + 1$. Such a space is necessarily projectively flat. 2. A projectively flat A_n , for which the rank of the skew-symmetric part of the Ricci tensor is $2k$, admits a transitive group of motions exactly of order $r = n^2 - (n - k)(2k - 1)$. 3. There are no A_n 's, admitting a complete transitive group of motions of order r , with $n^2 - n + 1 < r < n^2$. 4. The maximum order for an intransitive group of motions of an A_n is exactly $n^2 - 1$. 5. There are no A_n 's admitting an intransitive group of motions of order r , with $n^2 - n + 1 < r < n^2 - 1$.
V. Dalla Volta.

Norden, A. P.: Über die polare Normalisierung in einem Raum mit ausgeartetem absoluten Gebilde. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu 9, 198—212 (1952) [Russisch].

In der modernen projektiven Differentialgeometrie ordnet man jedem Punkt X_0 einer Mannigfaltigkeit X_k des P_n einen durch X_0 gehenden P_{n-k} und einen im Tangentialraum von X_0 liegenden, jedoch nicht durch X_0 gehenden P_{k-1} nach irgendeinem Gesetz zu und nennt diese Räume Normalen 1. und 2. Art. Wenn diese Normalräume stets bezüglich einer im P_n fest vorgegebenen Quadrik Q_{n-1} zueinander polar sind, spricht Verf. von „polarer Normalisierung“. Mit Sonderfällen derselben hat er sich bereits früher beschäftigt [s. Norden, dies. Zbl. 35, 240; 41, 306, 307 und Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 50, 57—60 (1945)]. In der vorliegenden Arbeit wird der weitere Sonderfall behandelt, daß Q_{n-1} eine einfach entartete Klassenquadrik ist, d. h. durch eine nicht entartete Q_{n-2} eines P_{n-1} beschrieben wird. Bereits an früherer Stelle war gezeigt worden, wie durch die Normalisierung eine Übertragung definiert wird, wozu ein Fundamentaltensor g_{ij} gehört. Bei einfacher Entartung gibt es dann außerdem noch einen Vektor g^j mit $g_j, g^j = 0$. Verf. bezeichnet mit D_k den dann auf der X_k bestimmten symmetrischen, affinen Zusammenhang und entwickelt eine Reihe von Formeln dazu. Die besondere Bauart der so erhaltenen Räume D_k liegt darin, daß sie in gewisser Weise durch ∞^1 Räume D_{k-1} gefasert werden, in denen man projektive Metriken von der Krümmung 0 erklären kann. W. Burau.

Katsurada, Yoshie: On the parallel displacement of arc. Tensor, n. Ser. 2, 85—88 (1952).

In a previous paper [J. Fac. Sci., Hokkaidô Univ. I 12, 17—28 (1951)] the author defined an extended connexion parameter $\Gamma_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, M$) in an n -dimensional space L_n with an affine connexion Γ_{jk}^i and for an m -dimensional subspace S $x^i(u^i)$ ($i', j', k' = 1, 2, \dots, m$) in L_n an induced extended connexion parameter $\Gamma_{\beta j' \gamma k'}^{\alpha i'}$. Now she considers infinitely nearby points P_0, P_1 on S and infinitely nearby curves C_0, C_1 passing through P_0 and P_1 . She expands the equation $u^i(t)$ of C_0 in power series of $t - t_0$ where t_0 is the parameter at P_0 and defines a new curve C_0^M by the equation which is obtained from that of C_0 by cutting at the M -th power and similarly defines C_1^M . She says that if

$$u_1^{i'} = u_0^{i'} + du^{i'}, \quad u_1^{(\alpha)i'} = u_0^{(\alpha)i'} - \Gamma_{\beta j' \gamma k'}^{\alpha - 1 i'} u_0^{(\beta + 1)j'} du^{(\gamma)k'}$$

where $du^{(\gamma)k'} = u_1^{(\gamma)k'} - u_0^{(\gamma)k'}$, then $C_0^{(M)}$ and $C_1^{(M)}$ are parallel. Then making $M \rightarrow \infty$, she gets the definition of parallel displacement of a curve C_0 on S . Especially she gets the following theorem: A geodesic curve on S is the curve obtained by parallel displacement of an arc to itself.
S. Sasaki.

Petrescu, St.: Considérations concernant les espaces à connexion projective P_2 . Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 3, 529—554 u. russ. u. französ. Zusammenfassgn. 554—556, 556—558 (1952) [Rumänisch].

On considère la classification des espaces à connexion projective sans courbure par la méthode de congruences du Ref. En désignant par ds^1, ds^2, ds^0 les différentielles des arcs d'un système de trois congruences indépendantes, où ds^1, ds^2 sont des formes indépendantes dans les variables x^1, x^2 de l'espace, le groupe de transformations de congruences de l'espace P_2 est donné par les formules

$$(1) \quad ds^1 = a ds^1 + b ds^2, \quad ds^2 = \alpha ds^2 + \beta ds^2, \quad ds^0 = ds^0 + p ds^1 + q ds^2.$$

Par rapport à ce groupe la torsion possède des composantes t_{bc}^a, t_{bc}^0 où a, b, c prennent les valeurs 1, 2. Si les t_{bc}^a ne sont pas toutes nulles (la torsion affine n'est pas nulle), on peut associer au problème une forme de Pfaff invariante, par exemple ds^4 . Donc on peut supposer dans (1) $a = 1$, $b = 0$ et alors on montre que l'on peut aussi réduire à zéro p et q et l'espace P_2 possède au plus un groupe de transformations en lui-même à quatre paramètres. Cela arrive seulement si la forme invariante ds^2 est une différentielle totale exacte et si la connexion peut être réduite à la forme canonique $\Gamma_{11}^2 = -\mu x^2$, $\Gamma_{12}^2 = 1$, $\Gamma_{11}^1 = \mu$, les autres composantes de la connexion étant nulles et μ étant une constante. Dans le cas où la torsion affine t_{bc}^a est nulle, le groupe de l'espace P_2 peut avoir au plus un groupe de transformations en lui-même à 5 paramètres, le cas d'un groupe à quatre paramètres étant exclu. Pour montrer que le maximum de 5 paramètres est atteint on se sert d'un exemple donné par le Réf.

G. Vranceanu.

Tsuboko, Matsuji: On a method of plunging of R_2 with symmetric projective connection into a four-dimensional projective space S_4 . Tensor, n. Ser. 2, 162—168 (1952).

Es handelt sich um das Problem der Einbettung eines gekrümmten zweidimensionalen projektiven Raumes in einen vierdimensionalen nicht gekrümmten, wobei der Begriff „Einbettung“ im Sinne von J. Kanitani [Japanese J. Math. 19, 395—403 (1948)] gemeint ist. In dieser Arbeit wird das Problem der Einbettung behandelt unter gewissen Voraussetzungen [Bedingungen (6)]. Insbesondere wird gezeigt, daß ein R_2 derart in einem R_4 eingebettet werden kann, daß ein beliebiges Netz auf R_2 in ein zu den charakteristischen Kurven konjugiertes Netz übergeht [J. Kanitani, On a method of plunging of R_2 with symmetric projective connexion into a projective space S_4 , Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 15, 87—91 (1949)]. Verf. gibt u. a. eine hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Räume R_2 und \bar{R}_2 sich so in einen projektiven Raum S_4 einbetten lassen, daß sie nach der Einbettung in projektiver Korrespondenz zueinander stehen.

St. Golab.

Nasu, Yasuo: Non Euclidean geometry in Finsler spaces. Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, 8—12 (1952).

The author endows a projective connexion satisfying certain analytic conditions to a space of line elements and considers the case where the holonomy group fixes a non-degenerate hyperquadric. For example the following theorem is proved: For such manifold there exists a Finsler metric such that all the coefficients of the projective connexion can be determined by the line element of the Finsler metric.

S. Sasaki.

Kawaguchi, Akitsugu: On a higher order space with the connection belonging to a Lie group. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 361—372 (1952).

Es sei M_N der Darstellungsraum einer r -gliedrigen Lieschen Gruppe G . Die auf die Punkte von M_N wirkenden infinitesimalen Transformationen von G werden zu Transformationen der Schmiegräume von m -dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von M_N erweitert. In einem X_n werden den Schmiegräumen von m -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten Räume M_N zugeordnet, wobei diese Zuordnung (wie es bei einer solchen als fibre-bundle bekannten zusammengesetzten Mannigfaltigkeit üblich ist) gewissen Axiomen genügen soll, die die Einführung einer Übertragung in der Basismannigfaltigkeit X_n gestatten. Die Integrabilitätsbedingungen werden aufgestellt. Die Note soll einer allgemeineren und umfassenden Begründung der Räume höherer Ordnung (das sind die Räume, deren Grundelemente die Schmiegräume einer bestimmten Ordnung von m -dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten sind) dienen.

W. Klingenberg.

Katsurada, Yoshie: Specialization of the theory of a space of higher order. II. On the extended Lie derivative. Tensor, n. Ser. 2, 15—26 (1952).

(Part I, this Zbl. 45, 255). First the author considers an infinitesimal transformation (1) $\bar{x}^i = x^i + \xi^{(i)}(x) \delta\tau$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$) and the extended infinitesimal transformation (2) $\bar{x}^{(\alpha)i} = x^{(\alpha)i} + \xi^{(\alpha)i}(x, \dots, x^{(\alpha)}) \delta\tau$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, M$) in a space of line elements of order $M: K_n^{(M)}$, where $\xi^{(\alpha)i}$ is the excontravariant extensor obtained by differentiating ξ^i α times with respect to t . Then she constructs Lie derivatives of a scalar, vectors v^i , tensors $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$

and vectors $v^i, w_{\gamma i}$, extensors $T^{\gamma_1 s_1 \dots \gamma_r s_r} \delta_1 \hat{j}_1, \dots, \delta_a \hat{j}_a$ each component of which is a function of $x, x^{(1)}, \dots, x^{(M)}$, in $K_n^{(M)}$ and in a space of higher order with a linear connexion Γ_{jk}^i or $\Gamma_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}$ getting results similar to those in the ordinary space with an affine connexion. According to the special character of $\xi^{(\alpha) i}$, there arises a problem: how about the relation between, for example, the Lie derivative of a vector $v^i(x)$ in the base manifold K_n with respect to (1) and the Lie derivative of the exvector $v^{(\gamma) i}$ in $K_n^{(M)}$ obtained by differentiating the vector $v^i(x)$ at each point on the parametrized arc $x^i(t)$, γ times with respect to t , with respect to (2)? [The answer in this case is that $x v^{(\gamma) i} = (x v^i)^{(\gamma)}$]. The author states many theorems of this nature for the case of $v^i, v^{(\gamma) i}; w_i, w_{(\gamma) i}; T_{ij}, T_{\alpha i \beta j}; \dots; \Gamma_{jk}^i(x), \Gamma_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}$ etc. where $T_{\alpha i \beta j}$ is an extensor defined by H. V. Craig [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 332—342 (1941)] and $\Gamma_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}$ is an extended connexion defined by the author [J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. I **12**, 17—28 (1951)]. An infinitesimal transformation (2) of $L_n^{(M)}$ is said to be an extended affine motion if it satisfies $x \Gamma_{\beta i \gamma k}^{\alpha i} = 0$. In the same way an infinitesimal transformation (2) of the space of higher order $R_n^{(M)}$ with the metric tensor $g_{\alpha i \beta j}$ defined from g_{ij} by the author in a paper cited above is said to be a motion in $R_n^{(M)}$ if $x g_{\alpha i \beta j} = 0$. The infinitesimal transformation (2) is an extended (affine) motion if and only if (1) is a (an affine) motion of $(L_n) R_n$.

S. Sasaki.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Heijendoort, John van: On locally convex manifolds. Commun. pure appl. Math. **5**, 223—242 (1952).

Die abstrakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit \bar{M} [im Sinne von H. Weyls „Idee der Riemannschen Fläche“ (Leipzig 1913)] werde durch eine bestimmte stetige Funktion f in den euklidischen E_3 abgebildet: $M = f(\bar{M})$. f erfülle 4 Bedingungen: 1. f sei eindeutig, stetig und „lokal topologisch“, d. h. jeder Punkt von \bar{M} soll eine Umgebung \bar{N} besitzen, für die $f(\bar{N})$ topologisch ist. 2. \bar{M} sei bei f „lokal konvex“, d. h. für jeden Punkt von \bar{M} existiere eine Umgebung \bar{N} , die nicht nur $f(\bar{N}) = N$ eine topologische Abbildung sein läßt, sondern auch zu einer Bildmenge N führt, die ganz im Rande eines konvexen Körpers K des E_3 enthalten ist. 3. In mindestens einem Punkt \bar{O} von \bar{M} sei \bar{M} „absolut konvex“, d. h. es existiere eine Umgebung \bar{N} von \bar{O} , so daß es in $O = f(\bar{O})$ eine Stützebene von K gibt, die außer O keinen anderen Punkt von K enthält. 4. Durch Rückübertragung der euklidischen Metrik der Bildmannigfaltigkeit M auf \bar{M} läßt sich \bar{M} zu einem metrischen Raum machen. Eine Teilmenge von \bar{M} heißt dann beschränkt, wenn die Menge der Entfernungen zwischen je zweien ihrer Punkte beschränkt ist. Nun wird vorausgesetzt, daß jede unendliche beschränkte Teilmenge von \bar{M} einen Häufungspunkt in \bar{M} hat. Die Metrik von \bar{M} heißt dann vollständig bei f . Unter diesen vier Voraussetzungen für f wird bewiesen, daß f topologisch ist und daß die Bildmenge $M = f(\bar{M})$ der Rand einer dreidimensionalen konvexen Menge ist. M ist also entweder beschränkt und dann mit einer Kugel- fläche homöomorph, oder M ist unbeschränkt und mit einer Ebene homöomorph. Der Beweis wird so durchgeführt, wie er sich auch für eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit \bar{M} und ihr Bild im euklidischen E_n behandeln läßt. Ein Anhang bringt eine Modifikation des in L. Bieberbachs „Differentialgeometrie“ (Leipzig und Berlin 1932) wiedergegebenen Beweises der von Erhard Schmidt gefundenen Kennzeichnung einer konvexen Punktmenge des E_n durch die Existenz von Stützebenen in ihren Randpunkten; die bei Bieberbach genannte Voraussetzung der Beschränktheit der Menge ist nicht nötig.

W. Süss.

Hadwiger, H.: Additive Funktionale k -dimensionaler Eikörper. I. Arch. der Math. **3**, 470—478 (1952).

Eine axiomatische Theorie der über der Klasse der konvexen Körper A des k -dimensionalen euklidischen Raumes definierten Eikörperfunktionale $\varphi(A)$ hat lediglich von allgemein postulierten Eigenschaften dieser Funktionale auszugehen. Die wichtigsten Eigenschaften der Eikörperfunktionale sind: I. Bewegungsinvarianz: $\varphi(A) = \varphi(B)$, wenn A und B kongruent sind; II. Additivität: $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A+B) + \varphi(AB)$, falls $A+B$ durch eine $(k-1)$ -dimensionale Schnittebene, die den uneigentlichen Eikörper AB enthält, in die Eikörper A und B zerlegt wird; III. Stetigkeit: $\varphi(A_n) \rightarrow \varphi(A)$, wenn A_n im Sinne der üblichen Abstandsmessung gegen A konvergiert; IV. Einfache Additivität: $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A+B)$ unter den gleichen Bedingungen wie bei II.; V. Translationsinvarianz: $\varphi(A) = \varphi(B)$, wenn A und B

translationsgleich sind; VI. Homogenität: $\varphi(\lambda A) = \lambda^n \varphi(A)$, wenn λA den zu A im Verhältnis 1: λ ähnlichen Eikörper bedeutet; VII. Monotonie: $\varphi(A) \geq \varphi(B)$ für $A \subset B$; VIII. Beschränktheit: Für alle Teilkörper A einer Kugel K gilt mit einer geeignet gewählten Konstanten $c > 0$ die Ungleichung $|\varphi(A)| \leq c$. — Die vorliegende Arbeit beschränkt sich zunächst auf bewegungsinvariante Eikörperfunktionale. Es wird gezeigt, daß jedes einfach additive (IV), bewegungsinvariante (I) und stetige (III) Eikörperfunktional $\varphi(A)$ bis auf eine multiplikative Konstante mit dem Volumen $V(A)$ übereinstimmt. Wird die Forderung (IV) durch (II) ersetzt, dann zeigt sich, daß die $k+1$ Minkowskischen Quermaßintegrale $W_\nu(A)$,

und die daraus durch eine feste Linearkombination $\varphi(A) = \sum_{\nu=0}^k c_\nu W_\nu(A)$ gebildeten Eikörperfunktionale $\varphi(A)$ die einzigen sind, die additiv (II), bewegungsinvariant (I) und stetig (III) sind. Die Quermaßintegrale $W_\nu(A)$ besitzen überdies noch die restlichen der aufgezählten Grundeigenschaften der Eikörperfunktionale, weshalb ihnen in einer axiomatischen Theorie eine zentrale Stellung zukommt; überdies ist $W_0(A) = V(A)$ das einzige Quermaßintegral, das außerdem noch einfach additiv ist. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit stellen einen ersten Beitrag für eine umfassendere Theorie dar. Weitere Beiträge, die sich auf translationsinvariante Funktionale beziehen, sind in Aussicht genommen. *R. Inzinger.*

Knothe, Herbert: Zur Theorie der konvexen Körper im Raum konstanter positiver Krümmung. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 2, 336—348 (1952).

Die bekannte Minkowskische Ungleichung $M^2 - 4\pi O \geq 0$ zwischen dem Integral der mittleren Krümmung M und der Oberfläche O eines konvexen Körpers gilt bei entsprechender Definition von M für alle konvexen Körper des sphärischen Raumes mit der Krümmung $K = 1$, bei denen es für jeden Randpunkt eine Minkowskische Stützkugel von Radius $\pi/4$ gibt. Der interessante Beweis der diesbezüglichen Ungleichung, die nach dem Muster von Bonnesen in verschärfter Form bewiesen wird und die, wie Verf. angibt, zuerst von Blaschke aufgestellt wurde, verwendet den Begriff der Cliffordschen Parallelen. Die entsprechende Ungleichung für konvexe Körper im hyperbolischen Raum dürfte ohne jede Einschränkung über dessen Randpunkte gelten. *A. Dinghas.*

Blumenthal, Leonard M.: Two existence theorems for systems of linear inequalities. Pacific J. Math. 2, 523—530 (1952).

Verf. entwickelt notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz nichttrivialer Lösungen eines homogenen Systems von m linearen Ungleichungen mit n Unbekannten. Ist A die $(m \times n)$ -Koeffizientenmatrix des Ungleichungssystems, so schreibt Verf. symbolisch (a) $Ax \geq 0$, wo x die Spaltenmatrix der n Unbekannten darstellt; alle Elemente der Matrix Ax sollen nichtnegativ sein, wobei aber wenigstens ein Element positiv sein soll. Wird diese zusätzliche Bedingung nicht gestellt, so wird (b) $Ax \geq 0$ geschrieben. — Bedeutet A' die transponierte Matrix von A , so wird $B = A A'$ gesetzt; $r+1$ sei weiter der Rang von A . Im Falle (a) lautet dann das Existenzkriterium wie folgt: Es gibt eine Anordnung der Zeilen und Spalten von A derart, daß der obere linke Hauptminor M der Ordnung $r+1$ der Determinante von B nicht verschwindet und daß jeder weitere Minor, der aus M dadurch entsteht, daß die letzte Zeile von M durch den zu den ersten $r+1$ Spalten gehörenden Teil der j -ten Zeile von B ($j = r+2, \dots, m$) ersetzt wird, nichtnegativ ausfällt. — Im Falle (b) gilt ein entsprechend modifiziertes Kriterium. — Verf. bedient sich vornehmlich einer geometrischen Arbeitsmethode, wie er sie bereits früher (vgl. dies. Zbl. 31, 279) zur Behandlung der Theorie linearer Ungleichungen anregte. *H. Hadwiger.*

Topologie:

Alexandroff (Aleksandrov), P. S.: Über einige Hauptrichtungen in der Entwicklung der sowjetischen Topologie. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat., estestv. Nauk Nr. 1), 3—33 (1952) [Russisch].

„In der vorliegenden Arbeit wird — ohne Anspruch auf Vollständigkeit — der Versuch gemacht, einige der wichtigsten Richtungen in der Entwicklung der sowjetischen Topologie zu charakterisieren“. — Inhalt: § 1. Urysohns Dimensionstheorie § 2. Arbeiten der sowjetischen Topologischen Schule auf dem Gebiet der allgemeinen Theorie der topologischen Räume. § 3. Weitere Entwicklung der Dimensionstheorie. § 4. Dualitätssätze. § 5. Stetige Abbildungen und Topologie der Mannigfaltigkeiten. *E. Pannwitz.*

Inagaki, Takeshi: Contribution à la topologie. I. Math. J. Okayama Univ. 1, 129—166 (1952).

Ein allgemein-topologischer Raum im Sinne von Alexandroff-Hopf ist bekanntlich ein geordnetes Paar $[R, -]$, bestehend aus einer Menge R und einem Operator $M \rightarrow \bar{M}$ ($M, \bar{M} \subseteq R$). Genau im Falle der Monotonie ($M_1 \subseteq M_2 \curvearrowright \bar{M}_1 \subseteq \bar{M}_2$) läßt sich bekanntlich dieser Operator auf Umgebungen zurückführen, in folgendem Sinne: es gibt einen Operator $x \rightarrow \mathfrak{B}(x)$ [$x \in R, \mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{B}(R)$] derart, daß $x \in \bar{M} \leftrightarrow \forall V [V \in \mathfrak{B}(x) \curvearrowright V \cap M \neq \emptyset]$. Indem man nun die Menge M als Parameter einführt, gelingt es, auch noch den nicht-monotonen Fall auf Umgebungen zurückzuführen, in folgendem Sinne: es gibt einen Operator $[M, x] \rightarrow \mathfrak{B}^M(x)$ [$M \subseteq R, x \in R, \mathfrak{B}^M(x) \subseteq \mathfrak{B}(R)$] derart, daß $x \in \bar{M} \curvearrowright \forall V [V \in \mathfrak{B}^M(x) \curvearrowright V \cap M \neq \emptyset]$. Dabei ist \mathfrak{B} parameter-unabhängig ($\mathfrak{B}^{M_1}(x) = \mathfrak{B}^{M_2}(x)$ für jedes $M_1, M_2 \subseteq R, x \in R$) genau im Falle der Monotonie. — Ordnen wir nun jeder Menge $H \subseteq R$ eine Topologie $M \rightarrow \bar{M}^H$ zu, so gilt das soeben Gesagte für jede einzelne dieser Topologien (H fest) ganz entsprechend; es gibt also einen Operator $[M, H, x] \rightarrow \mathfrak{B}_H^M(x)$ [$M, H \subseteq R, x \in R, \mathfrak{B}_H^M(x) \subseteq \mathfrak{B}(R)$] derart, daß $x \in \bar{M}^H \curvearrowright \forall V [V \in \mathfrak{B}_H^M(x) \curvearrowright V \cap M \neq \emptyset]$. Und genau im Falle der „monotonie au sens généralisé“ (für jedes $H: M_1 \subseteq M_2 \curvearrowright \bar{M}_1^H \subseteq \bar{M}_2^H$) ist der Umgebungsbegriff vom Parameter M unabhängig; man schreibt dann einfach $\mathfrak{B}_H(x)$. — Zwischen allgemein-topologischen Strukturen $M \rightarrow \bar{M}$ und monotonen (au sens généralisé) Strukturen $[M, H] \rightarrow \bar{M}^H$ besteht nun der folgende umkehrbar eindeutige Zusammenhang: $M \rightarrow \bar{M}$ steht in umkehrbar eindeutigen Zusammenhang mit einem Umgebungsbegriff $[M, x] \rightarrow \mathfrak{B}^M(x)$ (siehe oben); man schreibe $\mathfrak{B}_H(x)$ an Stelle von $\mathfrak{B}^M(x)$; der so umgedeutete Umgebungsbegriff $[H, x] \rightarrow \mathfrak{B}_H(x)$ erzeugt eine (au sens généralisé) monotone Struktur $[M, H] \rightarrow \bar{M}^H$, wobei $\bar{M} = \bar{M}^M$ gilt. Man kann also sagen, daß die Strukturen $[M, H] \rightarrow \bar{M}^H$ noch allgemeiner sind als die üblicherweise als allgemeinste topologische Strukturen aufgefaßten Operatoren $M \rightarrow \bar{M}$ von Alexandroff-Hopf. Und da sich dieser Prozeß iterieren läßt (man betrachte Operationen $[M, H_1, H_2, \dots, H_n] \rightarrow \bar{M}^{H_1 H_2 \dots H_n}$) kommt Verf. zu dem Resultat, daß „il me semble qu'il n'existe pas l'espace le plus général dans le sens essentiel“. Diese Betrachtungen geben Verf. Anlaß, die Zusammenhänge zwischen Abschließungsoperatoren $[M, H] \rightarrow \bar{M}^H$, Umgebungsbegriffen $[H, x] \rightarrow \mathfrak{B}_H(x)$ sowie entsprechenden Konvergenzbegriffen (für Folgen mit quasi-geordnetem Indexbereich) zu untersuchen. Diese scheinbar neuen Begriffsbildungen lassen sich aber interpretieren als Familien $(-)_H$, $(\mathfrak{B}_H)_H$ von allgemein-topologischen bzw. allgemeinen Umgebungsstrukturen im Sinne von Alexandroff-Hopf, sowie Familien von entsprechenden allgemeinen Konvergenzstrukturen; diese Familien sind bezogen auf Indizes H , deren Natur in den Untersuchungen des Verf. keine Rolle spielt. Und die vom Verf. angegebenen Zusammenhänge sind nichts anderes als die wohl-bekannten, die, bei festem H , zwischen $-^H$ und \mathfrak{B}_H , sowie dem entsprechenden Konvergenzbegriff mit dem Index H , bestehen. Durch diese Bemerkung, die Verf. leider entgangen ist, ordnet sich dieser Teil seiner Note völlig den von ihm zitierten Arbeiten G. Birkhoff (dies. Zbl. 16, 85), J. W. Tukey (Convergence and uniformity in topology, Princeton 1940), M. M. Day [Duke math. J. 11, 181—199 (1944)] unter; die einleitende Bemerkung, nach der es den genannten drei Autoren nicht gelungen sei, Äquivalenz zwischen Abschließung, Umgebungen und Konvergenz zu erzielen „dans l'espace le plus général proprement dit“, scheint hiernach zumindest einer Modifikation bedürftig. — Die Note enthält ferner eine Studie der von Tukey loc. cit. eingeführten Beziehung der konfinalen Ähnlichkeit von quasi-geordneten Mengen, eine Theorie der Konvergenz von Mengensystemen (in Verallgemeinerung der Konvergenz von Filtern), sowie eine Kompaktifizierung jedes Raumes mit Hilfe des Raumes der Ultrafilter.

Jürgen Schmidt.

Pereira Coelho, Renato: Some properties of regular spaces. Univ. Lisboa, Revista Fac. Si., II. Ser. A 2, 169—183 (1952).

This is an exposition of some of the simple properties of regular spaces. Examples are given to show that weakening or strengthening or forming lattice products in the lattice of topologies on a fixed set may destroy regularity (the coarser topology being taken as the smaller in the lattice). The treatment of canonical open sets (or open domains) contains many known results, and most of these depend on the lattice properties of the open sets of a space in which lattice these domains form normal elements.

V. S. Krishnan.

Knaster, B.: Un théorème sur la compactification. Ann. Soc. Polon. Math. 25, dédié à H. Steinhaus, 252—267 (1952).

Let X be a separable metric space of dimension n . A well-known theorem of W. Hurewicz asserts that X can be imbedded in a compactum of the same dimension. The author proves the following theorem: „In order that there exists a compact metric space X^* which contains X

and satisfies the conditions (1) $\dim_p(X^*) = \dim X$ for every point p of X and (2) $\dim_p(X^*) > \dim X$ for every point p of $X^* - X$, it is necessary that X is an absolute G_δ (i. e. homeomorphic to a complete metric space); and this condition is sufficient in case X can be imbedded in a compactum \tilde{X} such that X is expressible as the intersection of a countable number of open sets G_i in \tilde{X} with $\dim [\text{Fr}(G_i)] \leq n - 1$. As for the problem whether there exists an absolute G_δ which cannot be compactified in the way described in the final part of the theorem, it is shown that N and $N \times I$ are such spaces, where I is a closed unit interval and N the set of irrational points in I ; for $n > 2$ the problem is left open. In general the condition that X is an absolute G_δ implies the existence of a compactification X^* of X which satisfies (2) except a frontier set of dimension 0 and of the form $F_\sigma G_\delta$. In conclusion some open problems are stated. [The author deals with the question whether every absolute G_δ can be compactified by the addition of a countable number of points, but this is already solved by L. Zippin (this Zbl. 11, 275).]

K. Morita.

Cassina, Ugo: Su quattro proprietà equivalenti per i connessi irriducibili e sulla nozione di arco. Rend. Accad. naz. XL, Ser. IV 2, 139—153 (1952).

Im euklidischen E_n sei J eine (im üblichen Sinne) zusammenhängende, zwischen zwei (verschiedenen) ihrer Punkte a, b irreduzible Menge. Dann sind — wie Verf. zeigt — folgende 4 Aussagen gleichwertig: (1) es ist J abgeschlossen; (2) es ist J zusammenhängend im kleinen; (3) es ist J „geometrisch stetig“ (Definition weiter unten); (4) es besitzt J die „Extremaleigenschaft“ (Def. w. u.). — Dabei heißt J irreduzibel zwischen a und b , wenn keine echte, a und b enthaltende Teilmenge von J zusammenhängend ist. Ferner heißt eine linear geordnete Menge M geometrisch stetig, wenn folgendes gilt: Ist $a_0 \in M$, existiert ferner ein $a' \in M$ mit $a' < a_0$ bzw. ein $a'' \in M$ mit $a_0 < a''$ und ist U eine (beliebige) Umgebung von a_0 , so gibt es (mindestens) einen Punkt $b' \in M$ mit $b' < a_0$ bzw. $b'' \in M$ mit $a_0 < b''$ derart, daß aus $x \in M$ und $b' < x < a_0$ bzw. $a_0 < x < b''$ folgt: $x \in U$. — Schließlich wird unter „Extremaleigenschaft“ verstanden: Ist M linear geordnet, ist ferner A eine Menge mit $M' = A \cap M \neq \emptyset$ und mit $M'' = \bar{A} \cap M \neq \emptyset$, so gilt für jedes $b' \in M'$ und $b'' \in M''$ folgendes: Ist etwa $b' < b''$ und ist Z die Menge aller $z \in M$ mit $b' < z < b''$, so besitzt $(A - A) \cap Z$ einen kleinsten und einen größten Punkt (A bzw. A offener Kern bzw. abgeschlossene Hülle von A). — Die Beweise machen keinen Gebrauch vom Auswahlpostulat. In der Einleitung finden sich eingehende Nachweise über die Herkunft der verschiedenen auftretenden topologischen Begriffe.

Otto Haupt.

Miyazaki, Hiroshi: The paracompactness of CW -complexes. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 309—313 (1952).

This paper, continuing the work done already by the author and others who showed that any simplicial complex with the weak topology is paracompact, proves that any CW -complex (in the sense of J. H. C. Whitehead, this Zbl. 40, 387) is paracompact. The proof depends on two lemmas about the existence of open coverings satisfying restrictive conditions, the first one requiring a rather complicated demonstration.

C. Racine.

Smith, P. A.: Some topological notions connected with a set of generators. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 436—441 (1952).

Hauptergebnisse einer vom Verf. inzwischen veröffentlichten Arbeit (dies. Zbl. 44, 198).

T. Ganea.

Morse, Marston: Homology relations on regular orientable manifolds. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 247—258 (1952).

Verf. hat im Jahre 1927 in den Proc. nat. Acad. Sci. USA 13, 813—817 eine Reihe von Sätzen aufgestellt, die die Homologiegruppen von regulär begrenzten Gebieten auf geschlossenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten in Beziehung setzen zu den Homologiegruppen der Ränder dieser Gebiete und zu den Typenzahlen kritischer Punkte von Funktionen, die auf solchen Gebieten definiert sind. Diese Sätze werden in der vorliegenden Arbeit bewiesen, wobei an Stelle der früher benutzten Homologiegruppen mod 2 ein beliebiger Körper als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt wird.

H. Seifert.

Hirsch, Guy C.: Homology invariants and fibre bundles. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 383—389 (1952).

The results known about the relations between the homology properties of a fibre bundle (written f. b.), its base space and its fibre are summarized. In particular the author investigates the problem of determining the homology of the bundle when the base and the fibre are known, by his previous method [C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1328—1330 (1948); this Zbl. **43**, 171]. He defines the characteristic isomorphism which connects the homology of the fibre and that of the base, and shows that the characteristic isomorphism is sufficient to determine the additive (and even part of the multiplicative) structure of the cohomology ring \tilde{H} of the bundle. To determine fully the multiplicative structure of \tilde{H} new invariants are considered. For a f. b. with a structure group g which has an invariant subgroup g_0 and operates transitively on its fibre, he defines a new f. b. In case the fibre of a given bundle is a sphere and g is the orthogonal or unitary group, the invariants of the auxiliary f. b. coincide with the characteristic classes of the given sphere bundle. K. Morita.

Spanier, E. H.: Homology theory of fiber bundles. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 390—396 (1952).

The author treats the problem of determining the relations between the homology properties of a fibre bundle, its base space and its fibre for the case where the base space is a finite cell complex because of the easiness of computations. The technique consists of a study of the homology properties of the inverse images of the skeletons of the base space under the projection. This technique was used by Chern and the author (Chern, this Zbl. **35**, 388). The author discusses this algebraic machinery and gives some applications of it. It is shown how the characteristic class of the bundle can be obtained rather simply in this approach. By considering the graph of the projection as a bundle over the base space, some of the multiplicative properties of the cohomology ring of the bundle is obtained. In this way a theorem on sphere bundles is obtained which includes the main results of Gysin (this Zbl. **26**, 270). As the last application it is shown that if the fibre is totally nonhomologous to zero, the cohomology groups of the bundle are isomorphic to the corresponding groups of the product space of the base space and the fibre. K. Morita.

● **Wu, Wen-Tsun et Georges Reeb: Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées.** (Actual. Sci. Industr., No. 1183. Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg XI.) Paris: Hermann & Cie 1952. 157 p. 2000 francs.

Dieses Buch besteht aus zwei voneinander unabhängigen Arbeiten.

I. Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, par Wu Wen-tsun.

In dieser Arbeit werden Faserbündel (E, S^{m-1}, X, G) untersucht, die die $(m-1)$ -dimensionale Sphäre S^{m-1} als Faser und eine Untergruppe G der orthogonalen Gruppe $O(m)$ als Strukturgruppe haben. Die Äquivalenzklassen von Faserbündeln (E, S^{m-1}, X, G) über dem Basisraum X stehen nach dem bekannten Klassifikationssatz in eineindeutiger Beziehung zu den Homotopieklassen von stetigen Abbildungen von X in den klassifizierenden Raum B_G der Gruppe G . Verf. studiert die Fälle: 1. $G = O(m)$, orthogonale Bündel; 2. $G = SO(m)$, orientierte Bündel; 3. $m = 2m'$, $G = U(m')$, unitäre Bündel; 4. $m = 4m''$, $G = Sp(m'')$ = (quaternionale unitäre Gruppe), quaternionale Bündel. In allen diesen Fällen kann eine Grassmannsche Mannigfaltigkeit als klassifizierender Raum genommen werden. Verf. untersucht im Anschluß an Arbeiten von Chern, Ehresman, Hodge, Pontrjagin die Kohomologieringe der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten und verwendet dabei die Methode der Schubertschen Symbole. Verf. definiert die Stiefel-Whitneyschen Klassen w_i und die Pontrjaginschen Klassen p_i eines orthogonalen Bündels ($w_i \in H^i(X, \mathbb{Z}_2)$ — Ref. beschränkt sich auf die StW-Klassen mod 2 —; $p_i \in H^{4i}(X, \mathbb{Z})$). Nach dem Klassifikationssatz brauchen die w_i und p_i nur als Kohomologieklassen von $B_{O(m)}$ definiert zu werden. Das geschieht durch Angabe der entsprechenden Schubertsymbole. Jedes orientierte Bündel kann als orthogonales Bündel aufgefaßt werden. Also sind die w_i und p_i für ein orientiertes Bündel definiert. Es ist $w_1 = 0$. Zusätzlich ist noch eine Kohomologiekasse $X^m \in H^m(X, \mathbb{Z})$ definiert. Für ein unitäres Bündel ($m = 2m'$) sind die Kohomologieklassen w_i , p_i , X^m definiert. Es ist $w_i = 0$ für ungerades i . Zusätzlich hat man die Chernschen Klassen $c_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, die mit den bisherigen Klassen in folgender Beziehung stehen: $c_i = w_{2i} \pmod{2}$, $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i p_i = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ ($p_0 = c_0 = 1$), $c_{m'} = (-1)^{m'} X^m$. Für ein quaternionales Bündel sind die w_i , p_i , c_i definiert. Neue Klassen kommen nicht hinzu. Die c_i verschwinden für ungerades i . — Die Theorie der charakteristischen Kohomologieklassen liefert in den vom Verf. betrachteten Fällen notwendige Bedingungen dafür, daß die Strukturgruppe eines Faserbündels auf eine Untergruppe reduziert werden kann. Um zu hinreichenden Bedingungen zu gelangen, hat man die Homotopieeigenschaften der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten zu untersuchen. Das wird vom Verf. so weit durchgeführt, daß in einigen speziellen Fällen die oben erwähnten notwendigen Bedingungen auch als hinreichend nachgewiesen werden können. — Für eine kompakte differenzierbare und mit einer bestimmten

Orientierung versehenen Mannigfaltigkeit M^m ist die Klasse $X^m \in H^m(M^m, \mathbb{Z})$ des (kontra-varianten) Tangentialbündels von M^m für ungerades m gleich 0 und für gerades m ($m = 2m'$) gleich $(-1)^{m'} \gamma(M^m) (+M^m)$, wo $(+M^m)$ die zur Orientierung von M^m gehörige fundamentale Kohomologieklass und $\gamma(M^m)$ die Euler-Poincarésche Charakteristik von M^m ist. [Anmerkung des Ref.: Es treten in der vorliegenden Arbeit verschiedene Vorzeichenschwierigkeiten auf. Was gerade über die Klasse X^m gesagt wurde, stimmt mit dem Lemma 2 (p. 77) des Verf. nicht überein. Vielleicht ist Verf. bei diesem Lemma ein Schreibfehler unterlaufen. Was soll das Vorzeichen $(-1)^m$? Es ist doch $(-1)^{m'} \gamma(M^m) = \gamma(M^m)$. Die Definition von X^m muß so gewählt werden, daß die Formel (*) $X^m = (-1)^{m'} \gamma(M^m) (+M^m)$ herauskommt, sonst kommt man mit anderen Formeln des Verf. in Widerspruch. Vgl. eine Bemerkung des Ref. in dies. Zbl. 51, 143 über die Festlegung der Vorzeichen der Chernschen Klassen. Es ist Ref. nicht klar, ob Verf. die „kovarianten“ oder die „kontravarianten“ Chernschen Klassen benutzen will. Die Formel (*) zusammen mit der Formel $c_m = (-1)^{m'} X^m$ ist für die kontravarianten Chernschen Klassen gültig.] — Die vom Verf. durchgeführte Untersuchung der Homotopieeigenschaften gewisser Grassmannscher Mannigfaltigkeiten führt zu dem Resultat, daß die oben erwähnten notwendigen Bedingungen für die Existenz einer fast-komplexen Struktur auf einer $2m'$ -dimensionalen orientierten Mannigfaltigkeit [= Reduzierbarkeit der Strukturgruppe des Tangentialbündels von $SO(2m')$ auf $U(m')$] für $m' = 2$ und $m' = 3$ auch hinreichend sind. Eine orientierte M^4 ist demnach dann und nur dann fast-komplex, wenn es eine Kohomologieklass $c_1 \in H^2(M^4, \mathbb{Z})$ gibt, die folgende Eigenschaften hat: $c_1^2 - 2\gamma(M^4) (+M^4) = p_1$ und $c_1 = w_2 \pmod{2}$. Hierbei ist p_1 die Pontrjaginsche und w_2 die Stiefel-Whitneysche Klasse des Tangentialbündels. (Man beachte: Für eine orientierte M^4 ist die Klasse w_3 des Tangentialbündels immer gleich 0.) Die möglichen fast-komplexen Strukturen von M^4 stehen in eindeutiger Beziehung zu den Kohomologieklassen c_1 mit den gerade angegebenen Eigenschaften. c_1 ist die Chernsche Klasse der zugehörigen fast-komplexen Struktur. Auch für eine orientierte M^6 sind die notwendigen Bedingungen hinreichend. M^6 ist dann und nur dann fast-komplex, wenn die Klasse $w_2 \in H^2(M^6, \mathbb{Z}_2)$ des Tangentialbündels durch Reduktion mod 2 aus einer ganzzahligen Kohomologieklass gewonnen werden kann. Eine Klassifikation der möglichen fast-komplexen Strukturen wird für M^6 nicht durchgeführt. Ob die notwendigen Bedingungen auch für eine M^8 hinreichend sind, wird nicht untersucht. (Bemerkung: In allem bisher Gesagtem werden zwei fast-komplexe Strukturen als identisch betrachtet, wenn die zugehörigen Tangentialbündel als unitäre Bündel äquivalent sind.) Mit Hilfe der notwendigen Bedingungen beweist Verf., daß die Sphären S^{4k} nicht fast-komplex sind: Gäbe es eine fast-komplexe Struktur auf S^{4k} , so wäre $c_i = 0$ für $i \neq 0$ und $i \neq 2k$. Da alle Pontrjaginschen Klassen von S^{4k} verschwinden, ergibt sich $c_{2k} = 0$, während $c_{2k} = 2(\pm S^{4k})$ sein müßte. Ähnlich wird bewiesen, daß die komplexe projektive Ebene mit der „unnatürlichen“ Orientierung keine fast-komplexe Struktur zuläßt (H. Hopf). Verf. beweist ferner, daß eine orientierte M^4 dann und nur dann eine fast-quaternionale Struktur zuläßt [= Reduzierbarkeit der Strukturgruppe des Tangentialbündels von $SO(4)$ auf $Sp(1) = SU(2)$], wenn sie eine fast-komplexe Struktur mit $c_1 = 0$ zuläßt, d. h. wenn $w_2 = 0$ und $p_1 + 2\gamma(M^4) (+M^4) = 0$. Es gibt unter diesen Bedingungen genau eine fast-quaternionale Struktur. Eine orientierte M^4 besitzt also keine oder genau eine fast-quaternionale Struktur. Als Beispiel gibt Verf. an, daß die algebraische Fläche der Ordnung 4 im komplexen projektiven Raum fast-quaternional ist. Sie ist jedoch nicht parallelisierbar, da ihre Euler-Poincarésche Charakteristik gleich 24 ist. (Anmerkung des Ref.: Aus einem Satz von Rochlin, dies. Zbl. 46, 407, ergibt sich, daß die Euler-Poincarésche Charakteristik einer fast-quaternionalen M^4 immer durch 24 teilbar ist.) — Verf. beweist im letzten Kapitel den Multiplikationssatz („duality formula“) für die Stiefel-Whitneyschen Klassen mod 2 und für die Chernschen Klassen. Für die Pontrjaginschen Klassen wird der Multiplikationssatz nur in einem sehr speziellen Fall angegeben. Schließlich konstruiert Verf. noch eine 5-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit W , deren Stiefel-Whitneysche Klasse in der Dimension 3 nicht verschwindet. Das cartesische Produkt $W^5 \times S^{2k+1}$ (S : Sphäre) ist dann eine $(2k+6)$ -dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit, deren Stiefel-Whitneysche Klasse in der Dimension 3 nicht verschwindet. Für jede komplexe Dimension ≥ 2 gibt es also orientierbare Mannigfaltigkeiten, die keine fast-komplexe Struktur zulassen. — Die vorliegende Arbeit ist abgesehen vom letzten Kapitel die thèse des Verf. (vorgelegt 1949).

II. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, par G. Reeb. Die Arbeit zerfällt in drei Kapitel: A (Généralités), B (Théorèmes de stabilité), C (Points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable). In A wird der Begriff der geblätterten Mannigfaltigkeit mit Hilfe des üblichen „Atlas-Verfahrens“ definiert, das man auch zur Definition der differenzierbaren, komplex-analytischen ... Mannigfaltigkeiten verwendet (Ehresmann). Eine q -Blätterung der topologischen Mannigfaltigkeit V_n (von n Dimensionen) wird folgendermaßen gegeben: V_n ist mit offenen Mengen Ω_i überdeckt (i durchläuft eine Indexmenge). Jedes Ω_i wird durch eine topologische Abbildung f_i auf eine offene Menge $U_i = f_i(\Omega_i)$ des R^n (reelle

Koordinaten x_1, \dots, x_n) abgebildet. Die topologische Abbildung

$$h_{ij} = f_j \circ f_i^{-1} : f_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \rightarrow f_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$$

hat die Eigenschaft, die Schar der zur q -dimensionalen Ebene E_q ($x_{q+1} = x_{q+2} = \dots = x_n = 0$) parallelen q -dimensionalen Ebenen in sich überzuführen. Die Gesamtheit der Koordinatensysteme (Ω_i, f_i) heißt Atlas der Blätterung. Zwei verschiedene Atlanten können dieselbe Blätterung bestimmen, jedoch besitzt jede Blätterung einen vollständigen Atlas, der alle zulässigen Koordinatensysteme enthält. Die Blätterung definiert auf der Punktmenge V_n eine neue Topologie τ . Man führe in R^n eine neue Topologie τ' ein, die die im üblichen Sinne offenen Mengen der zu E_q parallelen q -dimensionalen Ebenen als offene Mengen hat. Die h_{ij} sind topologische Abbildungen auch bezüglich dieser Topologie τ' . Die Topologie τ von V_n ist die „größte“ Topologie, für die alle Abbildungen $f_i : \Omega_i \rightarrow U_i$ des vollständigen Atlas stetige (τ, τ') -Abbildungen sind. Ein Blatt der Blätterung wird als Zusammenhangskomponente von V_n bezüglich der Topologie τ definiert. Jedes Blatt ist eine q -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Durch jeden Punkt von V_n geht genau ein Blatt. Entsprechend werden die differenzierbaren und die reell-analytischen Blätterungen definiert. Das Kapitel A enthält eine Reihe Definitionen und Sätze mehr elementarer Natur. Es werden u. a. gewisse Stetigkeitsaussagen gemacht, einer dieser Sätze werde hier grob angedeutet: Wenn x, y Punkte desselben Blattes sind und z ein nahe bei x liegender Punkt von V_n ist, dann geht das von z ausgehende Blatt nahe bei y vorbei. — Das Kapitel A schließt mit Beispielen: a) Structure feuilletée définie par une forme de Pfaff fermée, b) Exemple d'une structure feuilletée sur la sphère S_3 . Es handelt sich um eine 2-Blätterung der 3-Sphäre, die genau ein kompaktes Blatt (nämlich eine Torusfläche) besitzt. Diese Blätterung kann durch eine differenzierbare, vollständig integrierbare Pfaffsche Form gegeben werden, die nicht reell-analytisch ist. Es ist unbekannt, ob S_3 eine 2-Blätterung besitzt, die durch eine reell-analytische vollständig integrierbare Pfaffsche Form gegeben wird. c) Exemples de structures feuilletées pour la dimension $q < n - 1$ sur une variété compacte V_n . Verf. gibt eine Blätterung von $S_{n-2} \times S_1 \times S_1$ an, die kompakte einfach-zusammenhängende Blätter, aber auch nicht kompakte Blätter besitzt (Verf., dies. Zbl. 30, 417). d) Quelques propriétés des variétés intégrales d'une forme de Pfaff complètement intégrable. Eine auf V_n gegebene vollständig integrierbare zweimal stetig differenzierbare Pfaffsche Form ω definiert auf V_n eine $(n-1)$ -Blätterung. In natürlicher Weise bestimmt ω auf jedem Blatt V_{n-1} eine Pfaffsche Form $\bar{\omega}$ mit $d\bar{\omega} = 0$. ($d\bar{\omega}$ läßt sich lokal in der Form $d\bar{\omega} = \omega \wedge \bar{\omega}$ schreiben, und $\bar{\omega}$ ist die Beschränkung von $\bar{\omega}$ auf V_{n-1} .) Die Kohomologieklassse von $\bar{\omega}$ ist ein Element von $H^1(V_{n-1}, R)$ und hängt nur von der Blätterung ab, bleibt also unverändert, wenn man ω mit einer nicht verschwindenden Funktion multipliziert. Verf. beweist u. a.: Wenn das Blatt V_{n-1} kompakt ist und die Kohomologieklassse von $\bar{\omega}$ nicht verschwindet, dann gibt es eine Umgebung U von V_{n-1} derart, daß jedes Blatt, das die Umgebung U trifft, das Blatt V_{n-1} in seiner Hülle enthält. Verf. bemerkt, daß der letzte Satz für $n = 2$ für das Studium gewisser Differentialgleichungen zweiter Ordnung nützlich ist [vgl. z. B. N. Levinson and K. Smith, Duke Math. J. 22, 41—48 (1943) und J. J. Stoker, Non linear vibrations, New York 1950, dies. Zbl. 35, 396.] In Kapitel B behandelt Verf. Stabilitätsfragen: Unter welchen Voraussetzungen sind die Nachbarblätter eines kompakten Blattes kompakt? Unter welchen Voraussetzungen impliziert die Existenz wenigstens eines kompakten Blattes, daß alle Blätter kompakt sind? [Man beachte die obigen Beispiele b), c), d)]. Erster Stabilitätssatz: Gegeben sei eine q -Blätterung der Mannigfaltigkeit V_n , die ein kompaktes Blatt V_q besitzt. Wenn die Fundamentalgruppe von V_q endlich ist, dann ist in jeder Umgebung U von V_q eine Umgebung W von V_q enthalten, die Vereinigungsmenge von kompakten Blättern ist und die folgende Eigenschaft hat (im Ref. unpräzise formuliert): Es sei σ die Ordnung der Fundamentalgruppe von V_q . Jedes in W enthaltene Blatt V'_q windet sich τ -mal um V_q herum ($\tau \leq \sigma$) und kommt dabei gleichoft (nämlich τ -mal) in der Nähe jedes Punktes von V_q vorbei. Die Fundamentalgruppe von V'_q ist eine Untergruppe derjenigen von V_q . Ist insbesondere V_q einfach-zusammenhängend, dann sind auch alle benachbarten Blätter V'_q einfach-zusammenhängend. Ist z. B. für $q = 2$ das Blatt V_q homöomorph der 2-Sphäre, dann sind auch die benachbarten Blätter mit der 2-Sphäre homöomorph. Für den Fall einer zweimal stetig differenzierbaren Blätterung fügt Verf. hinzu, daß die universelle Überlagerung der benachbarten Blätter mit derjenigen von V_q homöomorph ist. Dritter Stabilitätssatz (Satz über totale Stabilität). (Hier im Ref. wird nur ein wichtiger Spezialfall formuliert.) Die Mannigfaltigkeit V_n sei kompakt und $(n-1)$ -geblättert. Wenn wenigstens ein kompaktes Blatt mit endlicher Fundamentalgruppe existiert, dann sind alle Blätter kompakt und haben endliche Fundamentalgruppe. [Dieser Satz ist für q -Blätterungen mit $q < n - 1$ im allgemeinen falsch. Vgl. oben Beispiel c).] Der zweite Stabilitätssatz des Verf. kann hier nur angedeutet werden: Ein kompaktes Blatt einer Blätterung bleibt kompakt, wenn die Blätterung leicht abgeändert wird. — Das letzte Kapitel C bringt einige Anwendungen des ersten und dritten Stabilitätssatzes auf die Singularitäten einer vollständig integrierbaren Pfaffschen Form ω . Die Stabilitätssätze werden für die auftretenden besonderen Fälle neu bewiesen, so daß Kap. C unabhängig von A, B gelesen werden kann. Verf. untersucht insbesondere den Fall einer komplex-analytischen Pfaffschen Form, die vollständig integrierbar ist und in einer Umgebung des Nullpunktes des C^n (komplexer linearer Raum von n komplexen

Dimensionen, komplexe Koordinaten x_1, \dots, x_n) definiert ist und höchstens im Nullpunkt verschwindet. Die Form ω kann in der Umgebung des Nullpunktes in eine „Potenzreihe“ $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p + \dots$ entwickelt werden, wo ω_p eine Pfaffsche Form ist, deren Koeffizienten homogene Polynome vom Grade p in den x_i sind. Verf. setzt voraus, daß $\omega_1 = \sum x_i dx_i$. Es gilt: Für $n \geq 3$ gibt es in der Umgebung des Nullpunktes eine holomorphe Funktion φ , die „intégrale première“ von ω ist (d. h. $d\varphi \wedge \omega = 0$). [Die Funktion φ besitzt eine Potenzreihenentwicklung $\varphi = \varphi_2 + \dots + \varphi_p + \dots$, wo φ_q homogen in den x_i vom Grade q ist und wo $\frac{1}{2} d\varphi_2 = \omega_1$.] — Die vorliegende Arbeit ist bis auf einige Abänderungen die thèse des Verf. (vorgelegt 1948). F. Hirzebruch.

Olum, Paul: The theory of obstructions. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 363—370 (1952).

Bericht über die allgemeine Obstruktionstheorie (vgl. Olum, dies. Zbl. **38**, 366). Ferner Voranzeige von Ergebnissen, die inzwischen publiziert wurden [dies. Zbl. **50**, 174; Ann. of Math., II. Ser. **58**, 458—480 (1953)]. E. Burger.

Wada, Hidekazu: Über die Abbildungen vom Komplexen auf den ungerade dimensionalen reellen projektiven Raum. Tôhoku math. J., II. Ser. **4**, 231—241 (1952).

L'A. classe dans cet article les applications d'un complexe K^n de dimension n dans l'espace projectif réel de même dimension P^n . Pour n impair, la classe d'homotopie $f: K^n \rightarrow P^n$ est entièrement déterminée par la donnée des homomorphismes induits $f^*: H^1(P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(K^n; \mathbb{Z}_2)$ et $f^*: H^n(P^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(K^n; \mathbb{Z})$. Pour n pair, P^n n'est pas 1-simple, et, dans Satz 3, l'A. détermine les classes d'homotopie libres de S^n dans P^n ; il généralise de même l'invariant de Hopf aux applications de S^{2n-1} dans P^n . Un article récent de P. Olum [Ann. of Math., II. Ser. **58**, 458—480 (1953)] reprend cette question d'un point de vue plus général, mais dans le cas des variétés seulement. R. Thom.

Toda, Hirosi: Generalized Whitehead products and homotopy groups of spheres. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A **3**, 43—82 (1952).

This paper is the details of the previous note (this Zbl. **48**, 416) on the homotopy groups $\pi_r(S^n)$ of spheres. The author constructs an elementary CW-complex K_n such that its $(n+1)$ -skeleton K_n^{n+1} is a n -sphere S^n and $\pi_i(K_n) = 0$ for $i > n$. By making use of results for the homology groups of K_n due to Eilenberg-MacLane [Proc. nat. Acad. Sci. USA **37**, 234—256 (1951)] and isomorphisms: $H_{r+1}(K_n) \approx \pi_r(K_n^{r-1})/\partial\pi_{r+1}(K_n^r, K_n^{r-1})$, the generators of $\pi_r(S^n)$ can be realized by adequately chosen maps in virtue of the construction of the complex K_n . Main results are stated as follows: i) $\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{24}$ for $n \geq 5$, ii) $\pi_{n+4}(S^n) = 0$ for $n \geq 6$, iii) $\pi_{n+5}(S^n) = 0$ for $n \geq 7$, iv) $\pi_{n+6}(S^n) = \mathbb{Z}_2$ or $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ for $n \geq 8$, v) $\pi_{n+7}(S^n)$ is the direct sum of \mathbb{Z}_{15} and a group of order 2^k . vi) $\pi_{n+8}(S^n)$ is a 2-group. Similar results for the lower dimensional case $n+6 \geq r \geq 2n-1$ are also given in appendix. A. Komatsu.

Ehresmann, Charles: Sur les variétés presque complexes. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 412—419 (1952).

Verf. berichtet zunächst über die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **39**, 397) besprochenen Resultate und gibt dabei einige Vervollständigungen an. — Eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit V^{2n} von $2n$ reellen Dimensionen besitzt dann und nur dann wenigstens eine fast-komplexe Struktur, wenn das zum tangentiellen Bündel von V^{2n} assoziierte Bündel mit dem homogenen Raum $\Gamma_n = SO(2n)/U(n)$ als Faser über ganz V^{2n} eine Schnittfläche besitzt. Die Frage, ob eine Schnittfläche existiert, kann mit Hilfe der Hindernistheorie behandelt werden. Dazu ist einige Kenntnis der Homotopiegruppen der Γ_n erforderlich. Für $n = 3$ kann man die Hindernistheorie vollständig durchführen: Eine V^6 ist dann und nur dann fast-komplex, wenn ihre Stiefel-Whitneysche Klasse w_3 ($w_3 \in H^3(V^6, \mathbb{Z})$) verschwindet. Insbesondere ist also die 6-Sphäre fast-komplex. Die spezielle fast-komplexe Struktur auf der S^6 , die mit Hilfe der Cayley'schen Zahlen definiert werden kann, kann nicht aus einer komplexen Struktur gewonnen werden. — Verf. bespricht ferner den Satz von Wu, daß die Homotopieklassen der fast-komplexen Strukturen einer kompakten V^4 eindeutig den Elementen $x \in H^2(V^4, \mathbb{Z})$ mit folgenden Eigenschaften entsprechen: 1. x geht bei Reduktion mod 2 in die Stiefel-Whitneysche Klasse $w_2 \in H^2(V^4, \mathbb{Z}_2)$ über. 2. Es ist $x^2 - 2c_2 = p_1$. (Hier bezeichnet p_1 die Pontrjaginsche Klasse und c_2 die Euler-Poincarésche Klasse; $p_1, c_2 \in H^4(V^4, \mathbb{Z})$). — Verf. betrachtet „reelle“ und fast-

komplexe Untermannigfaltigkeiten von fast-komplexen Mannigfaltigkeiten und kommt im letzten Abschnitt auf das Äquivalenzproblem für zwei fast-komplexe Strukturen zu sprechen. Dieses Problem wurde in letzter Zeit von P. Libermann behandelt. *F. Hirzebruch.*

Eckmann, Benno: Complex-analytic manifolds. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 420—427 (1952).

Verf. berichtet über einige Probleme und Sätze aus der Theorie der (kompakten) fast-komplexen, komplexen, kählerschen und algebraischen Mannigfaltigkeiten. Jede der drei letzten Klassen von Mannigfaltigkeiten ist eine echte Unterklasse der folgenden. Es ist nicht bekannt, ob es eine Mannigfaltigkeit gibt, die wenigstens eine fast-komplexe Struktur, jedoch keine komplexe Struktur zuläßt. Man beachte: Auf der S^6 gibt es eine fast-komplexe Struktur, die nicht aus einer komplexen Struktur gewonnen werden kann [Eckmann-Frölicher (dies. Zbl. **42**, 405), Ehresmann (vorsteh. Referat)]. Es ist jedoch unbekannt, ob S^6 eine komplexe Struktur zuläßt. — Verf. berichtet u. a. über die Methoden von Hopf und die von Kirchhoff zur Untersuchung der Frage, ob die Sphären S^{2n} eine fast-komplexe Struktur zulassen (vgl. auch Verf., dies. Zbl. **42**, 416). Im letzten Abschnitt berichtet Verf. über die speziellen topologischen Eigenschaften einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit, die eine kählersche Metrik zuläßt (Theorie der harmonischen Formen). (Siehe Eckmann und Guggenheimer, dies. Zbl. **41**, 500, 501; Eckmann, dies. Zbl. **41**, 215). *F. Hirzebruch.*

Fox, R. H.: Recent development of knot theory at Princeton. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) **2**, 453—457 (1952).

Kurzer Bericht über Untersuchungen des Verf. und seiner Mitarbeiter (Blanchfield, Blankinship, Milnor, Torres) über Knoten und Verkettungen; Wegegruppen (dies. Zbl. **46**, 168), Alexander-Polynom und freier Differentialkalkül, verzweigte Überlagerungen, Gesamtkrümmung (dies. Zbl. **37**, 389). *Horst Schubert.*

Ringel, Gerhard: Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes. J. reine angew. Math. **190**, 129—147 (1952).

Verf. beweist: Für nicht orientierbare Flächen von beliebigem Geschlecht ist die Maximalzahl der Nachbarggebiete, γ , gleich der chromatischen Zahl χ . $q = 2$ wird als Sonderfall isoliert erörtert, sodann werden die Untersuchungen für $q \leq 15$ und $q > 15$ getrennt geführt. Das hauptsächlichste Beweismittel besteht in der Aufstellung von Konstruktionsschemata für Länderzerlegungen, in denen alle Länder dieselbe Kantenzahl, je zwei von ihnen genau eine gemeinsame Kante besitzen, und jede Ecke vom Grad 3 ist. Im übrigen sei auf die Arbeit des gleichen Autors [Math. Ann. **127**, 181—214 (1954)] verwiesen, wo das vorstehende Resultat für $q \neq 2$ im Sinne der Heawoodschen Vermutung verschärft wird. *F. Baebler.*

Angewandte Geometrie:

Gyarmathi, László: Konstruktive Lösung der metrischen Aufgaben des vierdimensionalen linearen Raumes auf Grund der Maurinschen Abbildung. C. r. I. Congr. Math. Hongr. 1950, 653—662, russische und deutsche Zusammenfassgn. 663, 664 (1952) [Ungarisch].

Das nach J. Maurin benannte Abbildungsverfahren des linearen $R_4(x, y, z, t)$ auf welches sich Verf. bezieht, besteht in der Normalprojektion auf drei Koordinatenebenen (x, y) , (x, z) und (x, t) , die so auf die Zeichenebene gelegt werden, daß sie die x -Achse gemeinsam haben (vgl. dies. Zbl. **30**, 270); die drei Bilder P' , P'' , P''' eines Punktes P erscheinen dabei jeweils an einen gemeinsamen Ordner $x = \text{const}$ gebunden. — Zur Erledigung der Maßaufgaben setzt Verf. eine dem Seitenrißprinzip ebenbürtige Methode ein, die auf der Drehung des R_4 um eine Bildebene oder eine dazu ganznormale Ebene beruht. Als Anwendung werden die wahre Länge einer Strecke und die wahre Größe eines Winkels konstruktiv ermittelt. Besprochen wird ferner noch die Darstellung der Normalen einer Hyperbene. — Anm. d. Ref.:

das genannte Abbildungsverfahren ist — neben dem üblichen, das die Normalrisse auf die Ebenen (x, y) und (z, t) benützt — innerhalb der „Wiener Schule“ durchaus häufig, seitdem es E. Kruppa 1929 in seinen Vorlesungen über die darstellende Geometrie des R_4 eingeführt hat. Speziell mit den Maßaufgaben beschäftigte sich 1932 ausführlich K. Vanek in seiner Lehramtsprüfungs-Hausarbeit. Veröffentlichte Mitteilungen hierüber liegen allerdings nicht vor.

W. Wunderlich.

Bragard, L.: Sur le problème fondamental de la géodésie dynamique. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **21**, 247—258 (1952).

Unter dem Grundproblem der dynamischen Geodäsie versteht Verf. die erstmalig von Stokes behandelte Aufgabe, den Abstand eines beliebigen Punktes der Geoidfläche von einem entsprechenden Punkt einer geeigneten Bezugsfläche (Rotationsellipsoid bzw. Niveau-Ärm) mit Hilfe der an der Erdoberfläche meßbaren Schwerewerte zu bestimmen. Es wird eine bemerkenswerte neue Lösung dieses Problems angegeben, die unter denselben Voraussetzungen gültig ist wie die bekannte Formel von Stokes (Volumengleichheit von Geoid und Bezugsfläche und Koinzidenz der den beiden Flächen entsprechenden Schwerpunkte). Verf. geht ebenso wie Stokes von der fundamentalen Beziehung $Y'_n = (n-1) \cdot Y_n$ aus, in der Y'_n und Y_n allgemeine Kugelfunktionen bedeuten, wie sie in den Ausdrücken für die Stör- und die Störung des Radiusvektors (Δr) auftreten. Im Gegensatz zu Stokes gelangt Verf. durch eine Umformung dieser Beziehung zu einer Integralgleichung für den radialen Abstand Δr des Geoids von der Bezugsfläche, deren strenge Lösung im Wege der Iteration gelingt. Die Lösung lautet:

$$\Delta r(P) = \frac{a_m}{G_m S} \int_S f_2(\psi) \Delta g dS + \frac{a_m}{G_m S^2} \int_S f(\psi) dS \int_S f_2(\psi) \Delta g dS_1.$$

hierin bedeuten $f(\psi)$ die bekannte Stokessche Funktion und $f_2(\psi)$ eine ähnlich aufgebaute Funktion des sphärischen Abstands ψ . Der allgemeinere Fall des Problems, in dem die beiden Gravitationszentren nicht zusammenfallen und infolgedessen die Kugelfunktionen 1. Ranges nicht verschwinden, führt auf eine analoge Integralgleichung, für die die Methode der sukzessiven Approximation aber keine konvergente Resultate liefert. Die Behandlung dieses allgemeineren Falles mit Hilfe der Fredholmschen Theorie will Verf. in einer späteren Veröffentlichung mitteilen.

W. Hofmann.

Theoretische Physik.

Hydrodynamik:

Ertel, Hans: Über die physikalische Bedeutung von Funktionen, welche in der Clebsch-Transformation der hydrodynamischen Gleichungen auftreten. S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, math. naturw. Kl. **1952**, Nr. 3, 19 S. (1952).

Die Clebsch-Transformation der hydrodynamischen Gleichung gestattet, den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} mit Hilfe von drei Skalarfunktionen φ, λ, μ in der Gestalt $\vec{v} = \text{grad } \varphi + \lambda \text{ grad } \mu$ darzustellen. Es liege nun speziell in einer barotropen idealen Flüssigkeit eine stationäre Wirbelströmung vor, für welche Orthogonalflächen des Stromliniensystems existieren. Verf. betrachtet ein Flüssigkeitsteilchen nach dem zur Zeit ϑ stattfindenden Durchtritt durch eine solche Orthogonalfläche und zeigt, daß λ die totale Energie (pro Masseneinheit), μ die Laufzeit des Teilchens und φ die Hamiltonsche Wirkungsfunktion $\int_{\vartheta}^t [v^2/2 - (\Phi + \int dp/\rho)] dt$ (Φ das Potential der Außenkräfte) darstellt. Diskussion der Ergebnisse in Verbindung mit früheren Arbeiten des Verf. [dies. Zbl. **40**, 118 und Verf. und Rossby, S.-Ber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. **1949**, Nr. 1 (1949)]. Auf nichtstationäre Strömungsfelder soll an anderer Stelle eingegangen werden.

K. Maruhn.

Jaumotte, André: Généralisation de la formule de Kutta et Joukowski aux ailes d'aires en fluide réel incompressible. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **3**, 1158—1162 (1952).

Für die an einer Schaufel eines Gitters in einer reellen Flüssigkeit normal zur mittleren Geschwindigkeit v_m (weit vor und hinter dem Gitter) angreifende Kraft P wird mittels des Impulssatzes die Formel

$$P = \rho |I'| v_m (1 + \varepsilon |\text{ctg } \alpha|)^{-1}$$

abgeleitet. Dabei ist Γ die über das Unendliche genommene Zirkulation, α der Winkel zwischen der Gitterachse und der Richtung von P , sowie ε die Gleitzahl.

H. Söhngen.

Poljachov, N. N.: Über die Druckverteilung auf der Oberfläche eines Profils bei stationärer Bewegung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 901—904 (1952) [Russisch].

L'A. étudie l'écoulement plan non stationnaire, à potentiel non uniforme d'un liquide autour d'un profil à pointe, immergé C ; C est donné et son mouvement est supposé connu. L'écoulement présente un sillage tourbillonnaire. En supposant connue la représentation conforme de l'extérieur de C sur l'extérieur d'un cercle, l'A. obtient les conditions frontières que vérifie le potentiel Φ . Les termes additifs de Φ , autres que ceux provenant du sillage, peuvent se déterminer aisément; il ne semble pas y avoir là de contribution originale. Par contre, la détermination de la circulation, due à la queue tourbillonnaire (et celle du champ des vitesses correspondant) est plus compliquée. L'A. résout ce dernier problème d'une manière approchée dans le cas des profils minces et de faible courbure. J. Kravtchenko.

Sretenskij, L. N.: Über die Wellen an der Trennungsfläche zweier Flüssigkeitsströme, die unter einem Winkel gegeneinander fließen. Izvestija Akad. Nauk SSSR Otdel. techn. Nauk 1952, 1782—1787 (1952) [Russisch].

Considérons deux couches superposées, d'épaisseurs infinies, de deux liquides parfaits (de densités différentes) pesants, dont la surface de séparation est voisine à tout instant du plan horizontal $z = 0$. L'A. suppose qu'un train d'ondes irrotationnelles, linéaires, de gravité, se propage suivant une droite dans chacune des couches liquides (au repos pour $z = \pm \infty$), le sens de propagation n'étant pas le même pour les deux couches. Il forme alors une condition à imposer au potentiel le long de la surface de séparation, généralisant celle de Poisson. On en déduit les solutions élémentaires du problème, analogue à celle de Stokes. L'A. forme l'équation de surface libre, étudie l'équation aux longueurs d'ondes, bref, généralise la théorie classique de Stokes au cas qu'il étudie. Une combinaison linéaire des solutions élémentaires obtenues permet de former des types curieux de mouvements de l'espèce envisagée. J. Kravtchenko.

Litwiniszyn, J.: Generalization of some equations of hydrodynamics. Prace fiz.-mat. 48, 1—26 (1952).

Verf. verallgemeinert die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für ein nichteuklidischen Raum, jedoch unter Beibehaltung der klassischen Newtonschen Annahmen für die Schubspannung. In den Gleichungen tritt dadurch ein zusätzliches Glied auf, welches den Riemannschen Krümmungstensor als Faktor enthält. Ähnliche Verallgemeinerungen werden für die Bernoullische Konstante, die Helmholtzschen Wirbelsätze und die Sätze von Thomson und Bjerknes vorgenommen. W. Wuest.

Dyke, Milton D. van: Impulsive motion of an infinite plate in a viscous compressible fluid. Z. angew. Math. Phys. 3, 343—353 (1952).

Verf. behandelt das Problem der zähen kompressiblen Strömung einer unendlich ausgedehnten Platte, die zur Zeit $t = 0$ mit konstanter Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt wird. Es wird das Thermometerproblem behandelt. Die Prandtl'sche Zahl ist 1, die Zähigkeit ist der Enthalpie proportional. Es wird ein Iterationsverfahren entwickelt, das für große Zeiten sukzessive die Strömung zu berechnen gestattet. Beim ersten Schritt wird die Umgebung der Platte durch die Grenzschichtlösung, die Außenströmung durch eine akustische Näherung erfaßt. Die dritte Näherung für den Schubwiderstand zeigt eine Verminderung gegenüber dem inkompressiblen Fall. H. Wendt.

Moore, L. L.: A solution of the laminar boundary-layer equations for a compressible fluid with variable properties, including dissociation. J. aeronaut. Sci. 19, 505—518 (1952).

Verf. behandelt die laminare kompressible Grenzschicht der ebenen Platte. Die üblichen Grenzschichtgleichungen werden in fünf in Integralform erscheinende Gleichungen umgeformt, die der Behandlung mit Großrechenmaschinen zugänglich sind. Es wird das Thermometerproblem und die ebene Platte mit Wärmeübergang im Bereich der Machschen Zahlen von 1 bis 20 für den Fall der nichtdissoziierten und der im Dissoziationsgleichgewicht befindlichen Luft betrachtet. Die die Eigenschaften der Luft festlegenden Koeffizienten werden von der benutzten Rechenmaschine durch graphische Daten verarbeitet, die für niedrige Temperaturen aus experimentellen Untersuchungen, für höhere Temperaturen mittels der kinetischen Gastheorie gewonnen werden. Wegen der Fülle der berechneten Grenzschichtströmungen muß auf die Originalarbeit verwiesen werden. Das Hauptaugenmerk wird auf die Berechnung des Schubwiderstandes und des Wärmeübergangs gelegt. Im letzten Abschnitt der Arbeit werden die Strömungen ohne und mit Dissoziation miteinander verglichen. Dabei zeigt sich z. B., daß die Dissoziation bei der Berechnung des Wärmeüberganges vernachlässigt werden kann, wenn die Plattentemperatur unter 2500°R liegt.

H. Wendt.

Ray, M.: Velocity and temperature distributions in a liquid flowing over an infinite plate. Boundary layer theory. Bull. Calcutta math. Soc. 44, 137—141 (1952).

Unter den üblichen Voraussetzungen der Grenzschichttheorie und der Annahme, daß die Reibungsspannung $\tau = \mu \partial u / \partial y$ proportional zu $u - U$ ist (u bzw. U = Geschwindigkeit in bzw. am Rande der Grenzschicht), zeigt Verf., daß der Wärmehalt i pro Masseneinheit einer instationären, zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung längs einer unbegrenzten, nichtleitenden, ebenen Platte derselben Gleichung

$$(\sigma - 1) di/du = (u - U) (d^2i/du^2 + \sigma), \quad \sigma = \text{Prandtl-Zahl}$$

genügt, die Young (dies. Zbl. 34, 115) für eine stationäre kompressible Gasströmung gefunden hat.

J. Weissinger.

● A selection of tables for use in calculations of compressible airflow. Prepared on behalf of the Aeronautical Research Council by the Compressible Flow Tables Panel. Oxford: Clarendon Press 1952. VIII, 143 p. \$ 8,00.

Die vorliegende Vertafelung der fundamentalen Gesetze der theoretischen Gasdynamik ist nicht nur für hochspezialisierte Mathematiker, sondern auch für die Entwurfsbüros der Industrie bestimmt. Dem ganzen Werk ist eine Liste der benutzten (möglichst an die Norm anschließenden) Symbole, jedem Tafelabschnitt eine Zusammenstellung der vertafelten Formeln (ohne Beweise) mit einem kurzen Begleittext vorangestellt. Eine wohlüberlegte Beschränkung auf das Wesentliche, die übersichtliche Aufteilung und Anordnung des Formel- und Tafelmaterials sowie der klare Satz erleichtern das Zurechtfinden in dem reichhaltigen Werk, dem in zweiter Band mit graphischen Darstellungen folgen soll. — Tafeln empirischer Gesetze sind nicht aufgenommen. Als Medium wird durchweg Luft zugrunde gelegt mit $\gamma = 1,4$ für das Verhältnis der spezifischen Wärmen. Jedoch sind zum Zwecke der Extrapolation auf andere γ -Werte in Teil VI einige Ableitungen nach γ tabelliert. Soweit erforderlich, findet eine Beschränkung auf (stationäre) ebene bzw. rotationssymmetrische Strömungen statt. — Das Tafelintervall ist im allgemeinen so gewählt, daß lineare Interpolation mittels der angegebenen ersten Differenzen möglich ist, gelegentlich werden statt der ersten die zweiten Differenzen gegeben zur Interpolation mit der Formel von Everett, für die eine Hilfstabelle mit Gebrauchsanweisung eingefügt ist. — Eine vollständige Inhaltsangabe ist hier nicht möglich. In Teil I sind alle wichtigen Zustandsgrößen bei isentropischer Strömung (längs einer Stromlinie) tabelliert in Abhängigkeit von der Machschen Zahl $M = q/a$ über den Bereich 0 (0,01) 0,5 (0,001) 1 (0,01) 5, in weiteren Tabellen auch mit der spezifischen Geschwindigkeit q/q_s und der Größe $(q/q_{\max})^2$ als unabhängiger Variabler. Teil II bringt die funktionalen Zusammenhänge längs einer Charakteristik, wobei der Neigungswinkel der Stromlinien bzw. der Machsche Winkel als unabhängige Variable dienen. In III sind die Gesetze des geraden und schiefen Stoßes vertafelt, während IV einige, insbesondere für die Versuchsauswertung wichtige Zusammenhänge zwischen Druckverhältnissen und Machzahlen bringt. Teil V enthält Tafeln der Funktionen x^r ($r = 1/7, 2/7, 5/7; 1/5, 2/5, 7/5; 5/2, 7/2$) und $(1 - x^2)^{r/2}$ für $r = -7(1) -1; 1(1) 7$. In VI schließlich sind verschiedenartige Tafeln zusammengefaßt: a) Berechnung von Reynolds-Zahlen, b) Druckbeiwerte, c) Ableitungen nach γ , d) Schallgeschwindigkeit als Funktion der Temperatur, e) Zustandsgrößen der Standardatmosphäre als Funktion der Höhe, f) Kurztafeln für isentropische Strömung und Stoß zwecks Erfassung des ganzen Machzahl-Bereichs mit einem Blick.

J. Weissinger.

Keune, Friedrich: Low aspect ratio wings with small thickness at zero lift in subsonic and supersonic flow. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 21, 57 S. (1952).

Bei schlanken Körpern kleiner Spannweite wird die Strömung in Körperrnähe durch die zweidimensionale Laplacegleichung in den Querdimensionen beherrscht. Dies ermöglichte die

Berechnung der Auftriebsverteilung nach R. T. Jones. In vorliegender Arbeit wird die Geschwindigkeitsverteilung an nicht angestellten Flügeln berechnet, indem das Integral für das linearisierte Geschwindigkeitspotential nach der Spannweite entwickelt wird. Daraus ergibt sich eine machzahlunabhängige „Querschnittsströmung“ wie bei R. T. Jones; im Gegensatz zu letzterer tritt aber noch ein machzahlabhängiger „Raumeinfluß“ von achsensymmetrischem Charakter hinzu. Die Theorie ermöglicht eine ganz wesentliche Vereinfachung der Rechnungen. Besonders einfach sind die Formeln für den Machzahleinfluß. Sie stimmen mit den von Oswatitsch (dies. Zbl. 43, 192) für Rotationskörper gegebenen überein. Die Widerstandsformel wurde auf anderen Wege schon früher von G. N. Ward (dies. Zbl. 34, 117) abgeleitet. Zahlreiche Beispiele ergänzen den Bericht. K. Oswatitsch.

Hjelte, Fritz: Velocity distribution on a family of thin conical bodies with zero incidence according to linearized supersonic flow theory. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 22, 16 S. (1952).

Wenn auch die eigentliche Bedeutung der vom Ref. gemeinsam mit K. Oswatitsch entwickelten Methode zur Behandlung linearisierter kegeliger Überschallfelder (dies. Zbl. 40, 410) im Fall der tragenden dünnen Platte zu suchen ist, so kann diese Methode doch — wie Verf. in der vorliegenden Note zeigt — mit Erfolg auch für die Ermittlung der Druckverteilung auf nichtangestellten symmetrischen kegeligen Körpern angewendet werden. Es wird eine Familie von zu zwei orthogonalen Ebenen symmetrischen Kegeln besprochen, deren Druckverteilung durch Reihen über elementare Funktionen ausgedrückt werden kann. Die hierin eingehenden Koeffizienten können dabei leicht der Potenzreihenentwicklung des Körperquerschnitts normal zur Anströmungsrichtung entnommen werden. — Als Beispiel wird die Berechnung eines Kegels mit biparabolischem Querschnitt durchgeführt. Hierzu genügt in guter Näherung ein einziges Glied der Reihe. Allgemein werden die ersten fünf Elementarfunktionen der Reihenentwicklung tabuliert und graphisch wiedergegeben. H. Behrbohm.

Gullstrand, Tore R.: The flow over symmetrical aerofoils without incidence in the lower transonic range. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 20, 20 S. (1952).

Berechnet wird die Geschwindigkeitsverteilung an nicht angestellten Profilen mittels der Integralgleichungsmethode von Oswatitsch bis zu Anströmmachzahlen nahe an eins. Zunächst wird die Integralgleichung mittels des Greenschen Satzes aufgestellt. Dann werden verfeinerte Ansätze für die Geschwindigkeitsverteilung aufgestellt. Nach Integration über das Feld ergibt sich eine nicht lineare Integralgleichung auf der Profilachse, welche numerisch durch Iteration bei fester Stoßlage und variabler Machzahl der Anströmung gelöst wird. Für mehrere Beispiele wird die Geschwindigkeitsverteilung mit lokalem Überschall und unterschiedlichen Stoßlagen berechnet. K. Oswatitsch.

Gullstrand, Tore R.: The flow over symmetrical aerofoils without incidence at sonic speed. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 24, 39 S. (1952).

Die Integralgleichungsmethode für nicht angestellte Profile wird auf Schallanströmung erweitert, indem anstatt der früheren Variablen (s. vorhergeh. Ref.) einfach mit den Störgeschwindigkeiten gerechnet wird. Das Integrationsgebiet bleibt im wesentlichen auf das Unterschallgebiet vor dem Dickenmaximum des Profils beschränkt. Die Strömung hinter dem Dickenmaximum ist einfach mit Überschallmethoden berechenbar. Drei Beispiele werden berechnet, die im wesentlichen schon alle interessierenden Formen umfassen. K. Oswatitsch.

Gullstrand, Tore R.: A theoretical discussion of some properties of transonic flow over two-dimensional symmetrical aerofoils at zero lift with a simple method to estimate the flow properties. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 25, 20 S. (1952).

Ausgehend von den bisherigen Berechnungen werden einige Eigenschaften der Geschwindigkeitsverteilung an nicht angestellten Profilen bei gemischten Unterschall-Überschallströmungen besprochen. Damit soll eine raschere Berechnung ermöglicht

werden. Es wird gezeigt, daß die Machzahlverteilung in unmittelbarer Schallnähe unabhängig wird von der Anströmmachzahl und daß die Ähnlichkeitsgesetze an senkrechten Stößen nur bei sehr dünnen Profilen gelten. Diese schon früher bekannten Eigenschaften sind damit weiter untermauert. *K. Oswatitsch.*

Gullstrand, Tore R.: The flow over two-dimensional aerofoils at incidence in the transonic speed range. Kungl. Tekn. Högskol., Inst. Flygtekn., Techn. Notes 27, 25 S. (1952).

Die Integralgleichungsmethode wird auf Profile kleiner Anstellung erweitert. Die Integralgleichung ist linear und enthält die Lösung beim Anstellwinkel Null. Die Zusatzgeschwindigkeiten an beiden Profilseiten haben entgegengesetzte Vorzeichen, außerdem muß eine entgegengesetzte Verrückung der Stöße beiderseits des Profils angesetzt werden. Die Resultate zeigen ein äußerst ausgeprägtes Minimum des Auftriebes vor Erreichen der Schallanströmung. Zusammen mit den Berechnungen ohne Anstellung (s. die drei vorangeh. Referate) ergibt sich damit eine nahezu geschlossene Darstellung der schallnahen Strömung an Profilen. *K. Oswatitsch.*

Behrbohm, Herman: The lifting trapezoidal wing with small aspect ratio at supersonic speed. Svenska Aeroplan A. B., Techn. Notes 1952, Nr. 10, 37 S. (1952).

Die Auftriebsrechnung an endlichen Flügeln in Überschallströmung wird wesentlich erschwert, sobald der Machkegel, welcher vom vordersten Punkt des einen Flügelrandes ausgeht, auf den anderen Flügelrand trifft. Das schon früher für den Rechteckflügel behandelte Problem wird hier für den Trapezflügel gelöst. Ausgehend von der in üblicher Weise linearisierten Potentialgleichung, wird das Aufwindgebiet mit quellartigen Singularitäten belegt. Die Quellstärke wird bestimmt aus der Bedingung, daß das Störpotential im Aufwindgebiet verschwinden muß, was die Lösung Abelscher Integralgleichungen erfordert. Im rückwärtigen Flügelteil ergibt sich ein teilweiser Rückgewinn der Auftriebsverluste. *K. Oswatitsch.*

Behrbohm, Herman: The flat triangular wing with subsonic leading edges in steady pitch and roll at supersonic velocities. Svenska Aeroplan A. B., Techn. Notes 1952, Nr. 9, 22 S. (1952).

Das Gieren und Rollen eines Dreiecksflügels in Überschallströmung mit Unterschallvorderkanten wird mittels linearisierter Gleichungen durch Belegung der Leitstrahlen mit quellartigen Singularitäten behandelt. Abweichend von der Arbeit über kegelige Strömung des Verf. und Ref. (dies. Zbl. 40, 410) ist die Belegungsstärke nun proportional zum Quadrat des Zentralabstandes. Beide Titelprobleme werden gleichzeitig gelöst, wobei die Druckverteilung am Flügel über die Integralgleichung der Tragflügeltheorie sehr schnell zu gewinnen ist. Die Berechnung des Aufwindes geschieht über die Volterra-Integralgleichung zweiter Art etwas mühsamer. *K. Oswatitsch.*

Linnaluoto, V. V.: A numerical integration method for calculating the pressure distribution at supersonic speeds for wings with subsonic leading edge at symmetrical flow conditions. Svenska Aeroplan A. B., Techn. Notes 1952, Nr. 6, 19 S. (1952).

In der linearisierten Überschalltragflächentheorie kann oftmals die Ermittlung sowohl des Störgeschwindigkeitspotentials als auch seiner Ableitungen durch Belegung des Flügелеinflußgebiets mit quellartigen Überschallsingularitäten bewerkstelligt werden. In allen Fällen, in denen die Quellstärke direkt durch die Randbedingungen vorgegeben ist, hat man es alsdann — wenn ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Machzahl $M = \sqrt{2}$ gewählt wird und wenn man sich nur für die genannten Größen auf der Flügelfläche selbst interessiert — nur mit der Berechnung von Doppelintegralen der Gestalt $\iint_{(G)} \frac{\lambda(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}$ zu tun. Das Integra-

tionsgebiet G ist dabei das im Vorkegel von x, y liegende Quellgebiet der ξ, η -Ebene. Für den Fall beschränkter $\lambda(\xi, \eta)$ gibt Verf. ein für ingenieurtechnische Zwecke geeignetes Verfahren zur approximativen Berechnung solcher Integrale an. Es besteht darin, daß 1. statt ξ, η (bzw. x, y) charakteristische Koordinaten $\sigma = (\xi - \eta)/\sqrt{2}$, $\tau = (\xi + \eta)/\sqrt{2}$ (bzw. entsprechend s, t) eingeführt werden, 2. das entstehende Doppelintegral $\iint [\lambda(\sigma, \tau)/\sqrt{(s - \sigma)(t - \tau)}] d\sigma d\tau$ mittels

einer quadratischen Gitteraufteilung der ξ, η -Ebene (parallel den σ, τ -Achsen) näherungsweise nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung als
$$\sum_{\mu, \nu} \lambda(s_{\mu}, t_{\nu}) \iint_{Q_{\mu, \nu}} \frac{d\sigma d\tau}{\sqrt{s_{\mu} - \sigma} \sqrt{t_{\nu} - \tau}} \quad [\lambda(s_{\mu}, t_{\nu})$$

Mittelwert von λ im Quadrat $Q_{\mu, \nu}$] geschrieben wird, 3. die $\iint_{Q_{\mu, \nu}}$ ein für allemal berechnet und

als „Matrix der Abstandsfunktion“ auf durchscheinendes Papier aufgetragen werden. Im gleichen Maßstab wird 4. die „Matrix der Belegungsfunktion“ $\lambda(s_{\mu}, t_{\nu})$ in den Flügelgrundriß eingeschrieben und 5. dann die durchsichtige Abstandsmatrix auf die so präparierte Flügelzeichnung gelegt, wonach sich leicht die Doppelsumme reihenweise berechnen läßt. Gesonderte Formeln bzw. Kurven geben Hilfswerte zur Berechnung der Beiträge der von den Flügelrändern angeschnittenen Quadrate der Abstandsmatrix. — Es sei erwähnt, daß der Titel der Note insofern irreführend ist, als das Verfahren keineswegs auf den darin genannten Spezialfall beschränkt ist.

H. Behrbohm.

• Pack, D. C.: *Hodograph methods in gas dynamics*. Mimeographed lecture notes, ed. by H. Roth. (Inst. fluid Dynamics appl. Math., Univ. Maryland, Lecture Ser. no. 17.) College Park, Univ. of Maryland 1952. IV, 59 p.

Die vorliegenden Vorlesungen geben eine Einführung in die Hodographenmethoden für Unterschallströmung. Nach Aufstellen der Hodographengleichungen für Potential- und Stromfunktion wird das Trennen der Variablen, einfache Lösungen und Grenzlinien behandelt. Anschließend werden die Eigenschaften der auftretenden hypergeometrischen Funktionen diskutiert. Abschließend beschäftigt sich der Verf. mit der Strömung um einen Zylinder.

K. Oswatitsch.

Goldstein, S.: *Selected problems in gas dynamics*. Proc. Internat. Congr. Math. (Cambridge, Mass., Aug. 30—Sept. 6, 1950) 2, 280—291 (1952).

Die Arbeit ist ein Referat über verschiedene neuere Ergebnisse der linearen Theorie stationärer Überschallströmungen. Nach einer allgemeinen Einleitung und grundsätzlichen Überlegungen werden behandelt: Umkehrtheoreme, Kegelströmung, Singularitätenbelegung, Strömungen in Rohren, Strömungen an singulären Punkten, im Unendlichen usw.

K. Oswatitsch.

• Polubarinova-Kočina, P. Ja.: *Theorie der Bewegung des Grundwassers*. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 676 S. R. 18,85 [Russisch].

Dans ces dernières années, un très grand nombre de travaux ont été consacré à la théorie des écoulements des eaux souterraines, en U. R. S. S. tout spécialement. Il était opportun de faire une mise au point des résultats obtenus à ce jour. Le grand traité de l'A. dont nous nous proposons de présenter une analyse sommaire, est une tentative de synthèse des travaux d'ordre théorique. Ecrit par un théoricien, le livre débute par le rappel des données expérimentales indispensables. On trouvera dans le chapitre I, une classification complète des sols perméables, la description de leurs caractéristiques mécaniques et l'étude des différents mouvements des eaux dont ces sols peuvent être le siège. Mais toute la suite de l'ouvrage est consacrée au cas, d'ailleurs fondamental au point de vue des applications, des eaux mobiles dans les sols perméables sous l'action de la gravité seule: c'est le phénomène de la filtration en milieux poreux homogènes et isotropes. On peut maintenant former les équations, d'ailleurs classiques, du problème. L'A. signale en passant la théorie générale de S. A. Christianovitch, mais la loi linéaire de la filtration est la seule qui sera utilisée dans tout le cours de l'ouvrage. Dans le cas des mouvements plans et permanents, s'effectuant dans des plans verticaux, auxquels est consacrée une grande partie du livre, on aboutit à des problèmes aux limites variés, relatifs à l'équation de Laplace [que vérifient le potentiel des vitesses $\varphi(x, y)$ et la fonction de courant $\psi(x, y)$ en chaque point $z = x + iy$ du plan du mouvement]; on notera: $f = \varphi + i\psi$, le potentiel complexe; $df/dz = u - iv$, la vitesse complexe. Mais les conditions à la frontière sont mixtes, en général, et d'ailleurs, on retrouve ici la difficulté, bien connue, de la théorie des sillages de Helmholtz: chaque fois que l'écoulement comporte une surface libre, le domaine de définition D de la fonction $f = f(z)$ (domaine occupé par le fluide en mouvement) est inconnu a priori. Quoiqu'il en soit, il y a là un champ magnifique — et d'un grand intérêt pour l'ingénieur — pour les applications de la théorie de la représentation conforme et de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Quelques exemples particuliers exceptés, l'A. se borne au cas, spécialement important, d'ailleurs, aux yeux du technicien où le domaine occupé par le liquide en mouvement dans le milieu poreux, est limité par des segments (finis ou infinis) de droites et, éventuellement, par des surfaces libres. On connaît alors a priori la forme de l'image de D dans le plan f ou dans le plan df/dz ; ces domaines images sont limités par des arcs de cercles (images des surfaces libres

dans le plan df/dz ou par des segments de droite; toutefois, si la frontière de D comprend une surface de suintement, son image dans le plan f est, a priori, inconnue. Il est donc possible, le cas des surfaces de suintement excepté, de former la solution des problèmes indéterminés correspondants (au sens de la théorie des sillages). Mais l'A. a soin d'accompagner ses formules résolutive de graphiques qui fournissent les solutions numériques des problèmes déterminés avec une précision suffisante pour l'ingénieur. Passons en revue les principales questions traitées dans les chapitres consacrés aux écoulements plans et permanents. Au chapitre II, le lecteur trouvera une étude complète des différents types des conditions aux limites qu'on rencontre dans les applications. Puis l'A. étudie l'image du mouvement dans le plan $u + iv$ de l'hodographe. On en déduit la solution de nombreux problèmes indéterminés intéressant les écoulements en charge. Au chapitre III, l'A. poursuit l'étude d'autres types d'écoulements sans surface libre; au point de vue mathématique, ces problèmes reviennent à trouver la représentation conforme d'un polygone sur un demi-plan. Toutefois, les énoncés précis des questions marquent la différence avec le problème classique de l'inversion de la formule de Schwarz-Christoffel. De minutieux graphiques illustrent les calculs numériques de ce chapitre: on y trouvera aussi les expressions explicites des efforts que subissent les parois des ouvrages étudiés et des débits des écoulements correspondants. Notons quelques indications concernant l'étude qualitative des solutions au moyen des procédés variationnels (pp. 138—142). La démonstration de l'unicité de la solution pour le problème déterminé nous paraît devoir être précisée (pp. 93—94). Le chapitre IV est consacré aux écoulements plans et permanents avec surfaces libres. L'instrument analytique utilisé ici est la fonction de Joukowski; d'ailleurs, la méthode permet d'aborder le cas où les parois imperméables sont constituées par des lignes courbes (trochoïdes). D'autres artifices sont encore utilisés pour former des types de fonctions $z = z(f)$ qui résolvent le problème indéterminé pour des formes particulières de données frontières. Signalons dans cet ordre d'idées le procédé de Riesenkamp qui donne, en particulier, l'écoulement avec surface libre sur fond imperméable incliné sur l'horizontale. Au chapitre V, l'A. étudie les écoulements plans à surface libre pour lesquels le problème de représentation conforme peut être résolu au moyen de la formule de Christoffel-Schwarz (qui résout le problème indéterminé de la représentation conforme d'un polygone sur un plan). Cela se produit lorsque l'image de D dans le plan df/dz est limitée par des arcs de cercle ou des segments de droites passant par un même point; une inversion transforme alors le plan df/dz en un polygone. Ce procédé est illustré par de très nombreux exemples. Les problèmes étudiés dans les précédents chapitres (la portion de la frontière de D , connue a priori, étant toujours polygonale) peuvent être encore abordés autrement. Si l'on représente D sur le demi-plan supérieur Σ d'une variable complexe auxiliaire $\zeta = \xi + i\eta$, on constate aisément que le problème indéterminé se ramène à la recherche d'une fonction holomorphe dans Σ dont les parties réelle et imaginaire vérifient sur des segments de l'axe réel de ζ des relations linéaires à coefficients constants, variables d'un segment à l'autre. Le chapitre VI est consacré à l'exploitation de cette idée. Signalons ici les solutions formées par Nouméroff, abondamment illustrées de graphiques très commodes. La même idée permet de lier la théorie précédente aux séries hypergéométriques et au théorème de Fuchs, concernant les singularités des équations différentielles linéaires. C'est l'objet du chapitre VII. D'une part, on peut ainsi préciser les singularités de $z = f(\zeta)$ en un point commun à deux éléments distincts de la frontière de D ; mais l'A. se borne à l'essentiel et étudie seulement les singularités de $df/d\zeta$ et $dz/d\zeta$, et laisse de côté la discussion de $z = z(f)$, pourtant très utile dans les applications. D'un autre côté, on peut aussi exprimer les solutions des problèmes indéterminés au moyen de séries hypergéométriques, si le nombre de singularités n'excède pas trois. Les méthodes précédentes s'appliquent aussi aux écoulements dans des sols hétérogènes formés de couches homogènes caractérisées par des coefficients de Darcy différents; on trouvera au chapitre VIII de nombreux exemples de solutions des problèmes indéterminés, tant exactes qu'approchées. Dans le même chapitre, l'A. reprend le problème plan dans l'hypothèse des sols anisotropes: des exemples illustrent les applications de cette théorie difficile. Enfin, l'A. envisage le mouvement simultané de deux liquides de densités différentes: le cas d'un coefficient de filtration variable est également mentionné. Au chapitre IX l'A. examine les mouvements tridimensionnels mais permanents. Mais, ici, les solutions exactes restent encore à trouver: même dans le cas de révolution (cas du puits à paroi verticale) il faut se contenter de solutions approchées. Signalons, dans cet ordre d'idées, l'étude des interférences des sources à axes verticaux, la discussion approchée des drains cylindriques horizontaux, etc. Des hypothèses simplificatrices convenables (dites hypothèses de l'hydraulique) permettent de traiter avec un haut degré d'approximation les problèmes que posent les écoulements permanents. Il faut noter que, même ainsi schématisées, les questions exigent la mise en oeuvre des techniques mathématiques compliquées. Le chapitre X traite, justement, de cette partie hydraulique de la théorie; mais cette matière ne saurait être analysée avec compétence par un pur mathématicien. Il en est de même des questions auxquelles est consacré le chapitre XI; méthode de résolution graphique (construction du réseau $\varphi = c^{\text{te}}$ et $\psi = c^{\text{te}}$ pour les écoulements plans), méthode des différences finies, méthode des analogies électriques, méthode des modèles réduits. La deuxième partie de l'ouvrage (118 pages sur 698) est consacrée aux mouvements non permanents. Le chapitre XII traite des écoulements en

charge. On y trouve les solutions exactes de quelques problèmes plans très simples; il faut noter qu'ici les problèmes aux limites se ramènent souvent au cas permanent. L'A. discute aussi, d'une manière approchée, l'influence des oscillations de la surface libre dans les biefs limitant les milieux poreux. Par contre, les équations qui gouvernent les écoulements avec surface libre sont non-linéaires (équations de Boussinesq). Alors, on se borne à en former des solutions approchées dans le cas du plan: c'est la substance du chapitre XIII où l'A. reprend l'essentiel de la théorie de Boussinesq. Quelques exemples de discussion numérique complètent l'exposé. On peut aller plus loin si l'on linéarise les équations de Boussinesq. Au chapitre XIV, l'A. passe en revue le cas où cette linéarisation paraît légitime et construit quelques exemples de solutions exactes des équations approchées de l'écoulement. La plupart des mouvements étudiés sont plans; mais l'A. traite aussi un cas tridimensionnel. Le chapitre XV est consacré au difficile problème des mouvements plans verticaux, non permanents lorsque l'hypothèse dite „hydraulique“ est en défaut. Ici, la théorie des fonctions analytiques reprend ses droits; mais le problème se complique du fait que les fonctions utilisées dépendent d'un paramètre. Les équations obtenues ainsi sont compliquées et on ne sait les résoudre qu'approximativement. Enfin, le dernier chapitre est consacré aux procédés numériques de résolution des problèmes aux limites de la théorie des mouvements non permanents. — Ce qui précède éclaire le plan de l'A.: elle semble sacrifier l'exposé des théories générales, laisse de côté les questions, parfois délicates, d'existence et d'unicité. Par contre, le présent livre constitue une véritable encyclopédie d'exemples concrets, traités complètement jusqu'aux applications numériques, groupés autour de méthodes de résolution. C'est dire que l'A. a fait oeuvre extrêmement utile, où le mathématicien et l'ingénieur trouveront une masse énorme de résultats intéressants. On peut regretter que la bibliographie étrangère ait été systématiquement sacrifiée.

J. Kravtchenko.

Quantentheorie:

● Mott, N. F.: *Elements of wave mechanics*. Cambridge: At the University Press 1952. IX, 156 p. 21 s. net.

Der Umfang dieses Buches (150 Seiten) entspricht der Absicht des Verf., einerseits Experimentalphysikern die Grundlagen und wichtigsten Ergebnisse der Quantenmechanik zu vermitteln und zum anderen eine Einführung in anspruchsvollere Darstellungen dieses Gebietes zu liefern. In sieben Kapiteln werden die Schrödingergleichung, die Unbestimmtheitsrelationen, stationäre Zustände, das Vielteilchenproblem (incl. Theorie der Festkörper), Übergangswahrscheinlichkeiten, die Diracgleichung sowie α - und β -Zerfall der Atomkerne unter Beschränkung auf die wesentlichsten Punkte dargestellt. — Der klare und verständliche, bei aller Kürze doch gründliche Text dürfte das Buch in hervorragendem Maße befähigen, den vom Verf. angestrebten Zielen gerecht zu werden.

H. Lehmann.

Inönü, E. and E. P. Wigner: *Representations of the Galilei group*. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 705—718 (1952).

Wenn man die irreduziblen „eigentlichen Darstellungen“ der Galilei-Gruppe (d. h. der Koordinatentranslation, Rotation und der Transformationen auf ein bewegtes Bezugssystem) in der unrelativistischen Theorie aufsucht, zeigt es sich, daß (im Gegensatz zu den „Darstellungen bis auf einen Faktor“) diesen keine physikalische Interpretation gegeben werden kann: Es ist u. a. nicht möglich, Zustände zu finden, die genaue Aussagen über den Ort oder die Geschwindigkeit des Teilchens enthalten. Es erweist sich nämlich, daß in einer solchen Quantenmechanik Orts- und Impulsoperatoren reduzibel sein müssen, d. h. daß die Gesamtheit aller Zustände in Teilgesamtheiten zerlegbar ist, die invariant sind gegen alle obigen Transformationen. Dieses Verhalten entspricht den Ergebnissen bei der Untersuchung der Darstellungen der Lorentzgruppe (E. P. Wigner, dies. Zbl. 20, 296).

H. Kümmel.

Aleksandrov, A. D.: *Über das Einsteinsche Paradoxon in der Quantenmechanik*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 253—256 (1952) [Russisch].

Verf. setzt sich mit dem sogenannten „Einsteinschen Paradoxon“ auseinander. Er glaubt die Meinungen von Einstein, Bohr (dies. Zbl. 12, 427), Blochinzew (Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1953; vgl. auch dies. Zbl. 38, 405) und Mandelstam (Werke Bd. 5, Moskau 1950) widerlegen zu können, indem er behauptet, daß auch nach Ausschaltung der Wechselwirkung die gemeinsame ψ -Funktion den Zusammenhang der getrennten Systeme zum Ausdruck bringe. Wenn ψ wirklich objektive Prozesse darstellte, könnte man dem zustimmen. Die einzige sichere Behauptung ist jedoch, daß ψ das mikrophysikalische Wirken in die Makrophysik darstellt.

H. Kümmel.

Rumer, Ju. B.: Die Wirkung als Raumkoordinate. VI. Žurn. eksper. teor. Fiz. 22, 742—754 (1952) [Russisch].

Es wird der Zusammenhang der 5-Optik mit der relativistischen Theorie der Elementarteilchen mit ganzem Spin geklärt. Autoreferat.

Jordan, P.: Über die Erhaltungssätze der Physik. II. Z. Naturforsch. 7a, 701—702 (1952).

(Teil I, dies. Zbl. 48, 215). Verf. untersucht die Eigenschaften eines speziellen klassischen relativistischen Wellenfeldes, das Maxwell- und Mesonenfeld darstellen kann. Hierbei prüft er insbesondere die Eichinvarianz und die Existenz von Erhaltungssätzen für die elektrische und „Neutronen-Ladung“ [Wigner, Proc. Amer. philos. Soc. 93, 531 (1949)]. H. Kümmel.

Takeda, Gyô: On the renormalization theory of the interaction of electrons and photons. Progress theor. Phys. 7, 359—366 (1952).

Es werden die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Renormierungsverfahren in der Quantenelektrodynamik diskutiert. Verf. zeigt, daß diese Verfahren äquivalent sind, da sie von derselben Lagrange-funktion ausgehen und sich lediglich durch unitäre Transformationen unterscheiden. H. Lehmann.

Kamefuchi, Susumu and Hiroomi Umezawa: On the renormalization in quantum electrodynamics. Progress theor. Phys. 7, 399—405 (1952).

Verff. geben eine Modifikation des Gupta-Formalismus (S. N. Gupta, dies. Zbl. 42, 455) zur Durchführung der Renormierung an. H. Lehmann.

● **Marshak, Robert E.:** Meson physics. (International Series in Pure and Applied Physics.) New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1952. VIII, 378 p. 60/— s., \$ 7,50.

Es liegt auf der Hand, daß einer Monographie über die Physik der Mesonen zum gegenwärtigen Zeitpunkt beträchtliche Schwierigkeiten entgegenstehen. So weist der Autor selbst auf das zu erwartende rasche Anwachsen des experimentellen Materials hin und seine Äußerung zur theoretischen Situation: „No genuine meson theory exists but only plausible conjectures which occasionally illumine the complexities of the experimental material“ kennzeichnet — vielleicht etwas zu drastisch — den augenblicklichen Stand. So hat man weniger ein systematisches Lehrbuch als eine sorgfältige Zusammenfassung und Diskussion des vorliegenden experimentellen und theoretischen Materials. Besprochen werden Prozesse, an denen reelle Mesonen beteiligt sind (also keine Kernkräfte), so die Photomesonerzeugung, Mesonerzeugung durch Stoß von Nukleonen bzw. Atomkernen, Streuung von Mesonen an Nukleonen und Kernen, Einfang und Absorption von Mesonen in Atomkernen sowie allgemeine Eigenschaften der π - und μ -Mesonen. Zwei abschließende Kapitel sind der Mesonenerzeugung bei großen Energien (Höhenstrahlung) sowie den schweren Mesonen und V-Teilchen gewidmet. Die Grundlagen der theoretischen Behandlung werden in den ersten Kapiteln an Beispielen erläutert, doch wird eine Kenntnis der Methoden der Quantenfeldtheorie vorausgesetzt. Durch die eingehende Diskussion vieler theoretischer Arbeiten vermittelt das Buch einen guten Einblick in die gegenwärtig im Vordergrund des Interesses stehenden Probleme. H. Lehmann.

Baroncini, D.: The non-adiabatic method with a neutral pseudo-scalar meson field. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 642—658 (1952).

Die nichtadiabatische Methode von Tamm und Dancoff wird auf die neutrale pseudoskalare Mesonentheorie (mit beiden Kopplungen) angewandt; die Resultate werden mit den Ergebnissen der adiabatischen Rechnung verglichen. G. Lüders.

Hamada, Tetsuo and Masao Sugawara: Selection rules for decays of π -mesons and V-particles. Progress theor. Phys. 8, 363—379 (1952).

Unter Verwendung des allgemeinen Prinzips der Invarianz gegen Raumdrehung und Spiegelung wird der Zerfall eines π -Mesons in zwei Fermionen und eines V-Partikels (Spin 1/2) in ein Boson und ein Fermion untersucht. Es wird die Frage behandelt, ob einer dieser Zerfallsprozesse verboten werden kann, wenn man den verschiedenen Fermionen entsprechende Paritäten zuschreibt; die Verff. fanden, daß keine solche Möglichkeit besteht. Dann diskutieren sie dieses Ergebnis im Lichte der Hypothese der Ladungsunabhängigkeit und die Möglichkeit eines Modells, bei welchem die π -Mesonen und V-Partikeln als angeregte Zustände von Leptonen und Nukleonen angesehen werden. P. Urban.

Širokov, Ju. M.: Über den Spin der Teilchen mit der Ruhmasse Null. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* 23, 78—82 (1952) [Russisch].

Mit Hilfe eines Formalismus, der schon früher vom Verf. entwickelt worden ist [*Žurn. eksper. teor. Fiz.* 21, 748—760 (1951)], wird das Ergebnis von Fierz (dies. Zbl. 22, 427), daß ein Partikel mit der Masse Null nur zwei mögliche Einstellungen seines Spins hat, in neuer und kovarianter Weise abgeleitet. *G. Källén.*

Jappa, Ju. A.: Über einen Zusammenhang zwischen der Theorie der Regularisierung und der Theorie der Teilchen mit beliebigem Spin. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 86, 51—54 (1952) [Russisch].

Bekanntlich läßt sich ein Spezialfall der Pauli-Villarsschen Regularisierung aus dem Ansatz iterierter Klein-Gordon-Gleichungen bzw. aus der auf einen solchen führenden Theorie Lubanski-Bhabhascher Spinwellengleichungen durch eine äußere Analogie verstehen. Verf. diskutiert den formalen analytischen Zusammenhang zwischen den beiden letzteren Gegenständen und versucht zu einer Deutung der Regularisierung auf Grund von Spinwellengleichungen (unter Einbeziehung passender Matrizenfunktionen, die, etwa nach Bopp, das Massenspektrum bestimmen) zu gelangen bzw. umgekehrt zu einer Rechtfertigung der Spinwellengleichungen durch den Erfolg der Regularisierung. Vgl. a. nachfolgend. Ref. *F. L. Bauer.*

Karpman, V. I.: Zur Frage des Zusammenhangs zwischen der Methode der Regularisierung und der Theorie der Teilchen mit beliebigem Spin. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 89, 257—260 (1953) [Russisch].

Verf. zeigt, daß es nicht möglich ist, auf dem von ihm und Jappa (vgl. vorangehend. Ref.) eingeschlagenen Weg aus der Theorie der Spinwellengleichungen unmittelbar die Pauli-Villarssche Regularisierung vollständig herzuleiten. *F. L. Bauer.*

Tanikawa, Yasutaka: Theory of super-quantization of quantized field and its applications. *Progress theor. Phys.* 7, 193—206 (1952).

A new treatment of quantum field theory is proposed by applying the theory of super-quantization of quantized field. For examples of its application, it is shown that the symmetrical treatment of the four potentials of electromagnetic field is justified without introduction of the indefinite metric for the scalar photon, and the physical interpretation of the regulator theory of Bose field may be given. *Autoreferat.*

● **Blatt, John M. and Victor F. Weisskopf:** Theoretical nuclear physics. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1952. 864 p. \$ 12,50.

Salam, Abdus: Recent advances in nuclear theory and experiment. *Pakistan J. Sci.* 4, 4—10 (1952).

Bericht.

● **Feather, N.:** Nuclear stability rules. (Cambridge Monographs on Physics.) Cambridge: At the University Press 1952. IX, 162 p. 20 s.

L'A. discute l'ensemble des connaissances expérimentales relatives aux conditions de stabilité et de désintégration α ou β des noyaux atomiques. Une première partie examine les conditions de la stabilité: définition empirique de la stabilité, isobares stables voisins, influence de la parité, noyaux stables manquants, classement des noyaux par le nombre isotopique $A - 2Z$, valeurs favorisées de Z et N . La seconde partie étudie les régularités dans les radioactivités α : Règle et diagrammes de Geiger-Nuttall, influence des variations de spin, énergies de désintégration, activité α des noyaux légers et structure nucléaire, branchements et systématique des espèces α pures dans les séries radioactives. La troisième partie est consacrée à l'étude des régularités dans les désintégrations β : diagrammes de Sargent, phénomènes de capture électronique, énergies de désintégration et règles de stabilité relative, phénomènes d'émission de neutrons retardés. La quatrième partie donne quelques brèves indications sur la fission spontanée et le classement des éléments. Une très importante bibliographie complète l'ouvrage. *G. Petiau.*

Gamba, A., R. Malvano and L. A. Radicati: Selection rules in nuclear reactions. *Phys. Review*, II. Ser. 87, 440—443 (1952).

Für Kernreaktionen können Auswahlregeln, die im allgemeinen tiefer eingreifen als die übliche Spin- und Paritätsbilanz (zumindest, wenn der Hamilton-Operator der Wechselwirkung weitgehend separiert ist, wie bei Wigner- und Majorana- oder bei ladungsunabhängigen Kräften), durch einen von den Verff. angegebenen übersichtlichen Formalismus gewonnen werden. Er beruht auf bekannten gruppentheoretischen Methoden und kann schematisch durchgeführt werden, wenn einmal Tabellen der in Frage stehenden gruppentheoretischen Operationen zur Verfügung stehen. Zu dem Verfahren benötigt man die Kenntnis bzw. eine Annahme über die Symmetrietableaus der Zustände (meist Grundzustände) einfallender und abgehender Teilchen und erhält damit die mögliche Symmetrie der initialen und der finalen Nukleonenkonfiguration ψ_i bzw. ψ_f ; ferner benötigt man den Hamilton-Operator H_{int} einer allenfalls in Frage kommenden Wechselwirkung mit dem Photonen- oder Mesonenfeld (das zugehörige Symmetrieverhalten diskutieren Verff. für einige einfachere Fälle). Man kann dann zunächst die zulässigen Symmetrietableaus für z. B. $H_{\text{int}} \psi_i$ bestimmen. Man hat einen verbotenen Übergang, wenn keines von diesen mit einem von ψ_f zusammenfällt; $\int \psi_f^* H_{\text{int}} \psi_i d\tau$ verschwindet nämlich in diesem Fall, da Wellenfunktionen zu verschiedenen Symmetrieständen aufeinander orthogonal sind. Das Verfahren wird durch das Beispiel der Photozerlegung eines Alphateilchens illustriert, es ist jedoch auch für allgemeinere Fälle der Umwandlung unter Beschuß mit Quanten oder leichten Kernen gedacht.

F. L. Bauer.

Brysk, Henry: Nuclear matrix elements in the theory of beta-decay. Phys. Review, II. Ser. 86, 996—1005 (1952).

Verf. berechnet $|M|^2$ -Werte für einen großen Teil der β -aktiven Kerne, und zwar für alle fünf Arten von Wechselwirkungen. Der Zustand des sich umwandelnden Nukleons wird nach dem $j - j$ -Schalenmodell bestimmt (Dirac-Teilchen im Kastenpotential). Die ausgewerteten Zylinderfunktionen-Integrale und die Endergebnisse sind in einer Tabelle zusammengestellt. Da die experimentellen Daten über die Kernspins, β -Energie-Spektren und $\beta - \gamma$ -Winkelkorrelationen noch sehr lückenhaft sind, konnten die Quantenzahlen des Nukleons leider oft nicht eindeutig bestimmt werden. Die übererlaubten Übergänge werden durch das Schalenmodell nicht erfaßt. Nach Angabe des Verf. stimmen die theoretischen Werte (nur) unter der Annahme einer Tensor-Wechselwirkung mit den empirischen $f \cdot t$ -Werten überein. Die Rechnungen gehen bis zur 2. Ordnung einschließlich.

G. Süßmann.

Wang, M. H.: On the theory of orbital electron capture and beta-decay. Sci. Record 5, 77—85 und chines. Zusammenfassg. 77 (1952).

Nach der Fermischen Theorie des β -Zerfalls werden Formeln für die mittlere Lebensdauer gegen Einfang von Bahnelektronen abgeleitet, und zwar für eine beliebige Linearkombination der fünf verschiedenen Wechselwirkungen und beliebige Ordnungen. Unter der Annahme $m_p = 0$ sind die Formeln bis zur dritten Ordnung (einschließlich) für sämtliche K -, L - und M -Bahnen mit $Z = 30, 49$ und 79 und je drei Energietönungen (für jedes Z) numerisch ausgewertet und tabuliert worden.

G. Süßmann.

Gombás, P.: Über die Drehimpulsverteilung der Nucleonen im Kern. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 2, 247—259 (1952).

Die bei den Atomkernen auftretenden und experimentell bekannten ausgezeichneten Nukleonenzahlen, welche Aufschluß über das Vorhandensein abgeschlossener Schalen im Kern geben, können nach Haxel, Jensen und Suess sowie Goeppert-Mayer bekanntlich aus einem Einteilchenmodell des Kerns bestimmt werden. Die wichtige Frage, ob dabei das Einteilchenmodell eine wesentlich notwendige Voraussetzung ist, wurde durch Born und Yang in dem Sinne angeschnitten, daß diese Verff. die Existenz der ausgezeichneten Zahlen unter ganz allgemeinen Voraussetzungen nachzuweisen suchten. In dieser Arbeit wird hier nun das gleiche Problem behandelt, wobei der Verf. gewissen Einwänden von Paneth gegen die Born-Yangsche Arbeit begegnet, indem er sich auf ein etwas spezielleres, von ihm selbst vorher behandeltes Kernmodell festlegt und im übrigen nicht die ausgezeichneten Zahlen berechnet, sondern diejenigen Neutronen- und Protonenzahlen, bei denen erstmalig der Einbau eines s -, p -, d -, ... Nukleons in den Kern erfolgt. So erhält er eine mehr indirekte Bestätigung der ausgezeichneten Zahlen, welche dann unter der zusätzlichen üblichen Annahme einer starken Kopplung von Spin- und Bahndrehimpuls der Nukleonen im Kern folgt.

W. Macke.

Russek, Arnold und Larry Spruch: Interaction moment contributions to magnetic moments of nuclei. Phys. Review, II. Ser. 87, 1111—1117 (1952).

Bei Austauschkräften bewirkt die bewegte elektrische Ladung ein magnetisches Moment.

Dieses könnte für die Abweichung der magnetischen Kernmomente von den Schmidt-Linien verantwortlich sein. Es ergibt sich, daß die empirisch festgestellte Abweichung in einer generalisierenden Weise durch eine Linearkombination von drei phänomenologischen Wechselwirkungs- ausdrücken beschrieben werden kann, die die allgemeine Form darstellen, die durch ein ladung- austauschendes Potential herbeigeführt werden kann. Um zahlenmäßige Ergebnisse zu bekom- men, müssen Annahmen über die Radialfunktion gemacht werden. Im Potential wird eine Gaußfunktion angenommen; die Wellenfunktionen sind die Eigenfunktionen des Oszillators. Die frei wählbaren Konstanten werden durch Anpassung an die Erfahrung bestimmt, so daß eine Abänderung der Schmidt-Linien in der richtigen Richtung erfolgt. Die hier berechnete Abweichung der Momente der ungeraden Protonenkerne von den Schmidt-Linien ist proportio- nal zur Neutronendichte und umgekehrt. Folglich ist so die empirische Tatsache zu erklären, daß die Hinzufügung von zwei Neutronen zu einem ungeraden Neutronen Kern und von zwei Protonen zu einem ungeraden Protonen Kern die magnetischen Momente in Richtung auf die Schmidt-Linien verändert, sofern bei der Addition der beiden Nukleonen die Quantenzahlen l und j sich nicht ändern.

K.-H. Höcker.

Ryžanov, S. G.: Rotationsniveaus und Rotationspektren der schweren Kerne. Žurn. eksper. teor. Fiz. 23, 417—424 (1952) [Russisch].

Courant, Ernest D., M. Stanley Livingston and Hartland S. Snyder: The strong- focusing synchrotron. A new high energy accelerator. Phys. Review, II. Ser. 88, 1190—1196 (1952).

Im Synchrotron wird die Stabilisierung der Teilchenbahnen durch Wahl eines inhomogenen magnetischen Führungsfeldes erreicht. Nach dem Vorschlag der Verff. kann eine wesentlich stärkere Stabilisierung als üblich erreicht werden durch Auf- teilung des Umfanges in Stücke mit abwechselnd nach außen abnehmendem und nach außen zunehmendem Magnetfeld. Je nach Wahl dieser Felder erhält man Sta- bilität oder Instabilität (Anm. d. Ref.: Die Abweichung der Teilchen von der Gleich- gewichtsbahn wird durch eine Hillsche Differentialgleichung beschrieben; die mathe- matische Theorie ähnelt derjenigen des Bändermodells der Leitungselektronen). Eine Schwierigkeit bei der Verwirklichung eines derartigen Synchrotrons besteht in dem Wechsel der stabilen Phase bei der sogenannten Übergangsenergie.

G. Lüders.

Blewett, J. P.: Radial focusing in the linear accelerator. Phys. Review, II. Ser. 88, 1197—1199 (1952).

Das neue Stabilisierungsprinzip (siehe vorangeh. Ref.) kann, unter Verwendung inhomogener magnetischer oder elektrischer Felder, benutzt werden, um die in Linearbeschleunigern auftretenden destabilisierenden Kräfte zu kompensieren. (Diese destabilisierenden Kräfte rühren daher, daß sich die elektrische Feldstärke während des Hindurchflugs des Teilchens durch einen Beschleunigungsspalt zeitlich ändert.)

G. Lüders.

• **Wilson, J. G. (edited by): Progress in cosmic ray physics.** Amsterdam: North-Holland Publishing Co.; New York: Interscience Publishers, Inc. 1952. XIV, 557 p. 68 s.

Das Buch bildet den ersten Band einer Serie und stellt sich die Aufgabe, den Stand solcher Probleme darzustellen, bei denen gegenwärtig Fortschritte von größerer Bedeutung gemacht werden. Die einzelnen Beiträge, geschrieben von jeweiligen Fachleuten, umfassen: hochenergetische Zusammenstöße mit Kernen (Mesonen- schauer usw.), schwere instabile Teilchen, primäre Strahlung, geomagnetische Effekte, Entwicklung der Sekundärstrahlungen in der Atmosphäre, Beobachtungen unter Grund, zeitliche Schwankungen. Von besonderem Interesse für den theoreti- schen Physiker ist ein Beitrag von Michel über Kopplungseigenschaften der Ele- mentarteilchen und Auswahlregeln.

G. Lüders.

Caldirola, P., R. Fieschi e P. Gulmanelli: A phenomenological theory of cosmic radiation in the atmosphere. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 5—35 (1952).

Der Intensitätsverlauf der Komponenten der kosmischen Strahlung in der Atmosphäre wird mittels phänomenologischer Ansätze über die Mesonenproduk- tion und -zerfall dargestellt. Man ist in recht guter Übereinstimmung mit der Er-

fahrung, wenn man annimmt, daß Nukleonen von etwa 3 bis etwa 25 GeV bei Wechselwirkung mit anderen Nukleonen ein Meson erzeugen, von 25 bis 70 GeV entstehen etwa 2, darüber mehrere. Schärfstes Indizium hierfür ist der Überschuß an positiven Mesonen. Außerdem wird der Breiteneffekt diskutiert.

K.-H. Höcker.

Bau der Materie:

Glauber, A. E.: Zur Frage des Energieaustauschs zwischen einer fortschreitenden Bewegung und der molekularen Schwingung und Rotation. I. Žurn. eksper. teor. Fiz. **23**, 182—187 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht die Anregung von Schwingungszuständen eines zweiatomigen Moleküls für den speziellen Fall, daß die Relativgeschwindigkeit der stoßenden Partikel in die Kernverbindungsline des Moleküls fällt. Es wird ein sukzessives quantenmechanisches Näherungsverfahren angegeben, welches sich gegenüber den älteren Methoden durch Einfachheit auszeichnet und Ergebnisse hinreichender Genauigkeit erzielt. Das Verfahren läßt sich auf die Behandlung eines starren oder rotierenden Oszillators übertragen.

G. Ecker.

Lennard-Jones, Sir John and J. A. Pople: The spatial correlation of electrons in atoms and molecules. I. Helium and similar two electron systems in their ground states. Philos. Mag., VII. Ser. **43**, 581—591 (1952).

Die Schrödingergleichung für das Zweielektronenproblem wird durch eine Entwicklung der Wechselwirkung zwischen den Elektronen in eine Reihe nach Kugelfunktionen übergeführt in ein unendliches System von Differentialgleichungen für Funktionen, die nur noch von den Kernabständen abhängen. Verschiedene Näherungsmethoden zur Behandlung des Zweielektronenproblems werden durch Vergleich mit dem exakten Gleichungssystem diskutiert. Abschließend werden die Aussagen dieser Näherungen bezüglich der radialen Korrelation resp. der Winkelkorrelation der beiden Elektronen besprochen.

H. Koppe.

Chalatnikov, I. M.: Der Wärmeaustausch zwischen einem festen Körper und Helium II. Žurn. eksper. teor. Fiz. **22**, 687—704 (1952) [Russisch].

Es werden die möglichen Mechanismen des Wärmeaustauschs zwischen einem festen Körper und Helium II besprochen. Es wird gezeigt, daß der den angegebenen Austausch bestimmende fundamentale Mechanismus die Emission (und Absorption) von Energie durch die Grenze des festen Körpers ist, die Wärmeschwingungen ausführt. Der an der Grenze zwischen dem festen Körper und Helium II entstehende Energiestrom erweist sich als proportional der Differenz der vierten Potenzen der Temperatur der genannten Körper. Der Durchgangskoeffizient des zweiten Schalls durch eine dünne wärmeleitende Platte wird berechnet.

Autoreferat.

Leibfried, Günter und Horst-Dietrich Dietze: Versetzungsstrukturen in kubisch-flächenzentrierten Kristallen. I. Z. Phys. **131**, 113—129 (1951).

Bei der Berechnung der Spannungen und der Energie einer Versetzung nach der elastizitätstheoretischen Methode ergibt sich in ihrem Mittelpunkt eine Singularität, so daß ihre eigentliche Struktur nicht erfaßt werden kann. R. Peierls [Proc. Phys. Soc. **52**, 34—37 (1940)] hat diese Struktur dadurch erhalten, daß er zwischen den der Gleitebene benachbarten Netzebenen periodische Schubspannungen annahm. Der Ansatz gilt aber nur für quadratische Atomanordnungen wie sie z. B. in den (100)-Ebenen der kubisch-flächenzentrierten Kristalle bestehen, und ist nur unvollständig begründet. In der vorliegenden Mitteilung wird eine Begründung des Ansatzes von der Gittertheorie her gegeben und genaue Bedingungen für seine Gültigkeit aufgestellt. Der Ansatz wird dann übertragen auf die Basisebene der hexagonalen Kristalle und die Oktaeder-ebenen der kubisch flächenzentrierten Kristalle, die jeweils als Gleitebenen auftreten. Es werden dabei die verschiedenen Formen der Halbversetzungen abgeleitet und ihre Energie berechnet. Da die mathematischen Schwierigkeiten für strenge Lösungen zu groß sind, werden plausible Lösungen mit der Versetzungslänge und erforderlichenfalls dem Versetzungsabstand als Parameter angesetzt und deren Werte aus den Minimumsbedingungen für die Energie bestimmt.

A. Kochendörfer.

Dietze, Horst-Dietrich: Versetzungsstrukturen in kubisch-flächenzentrierten Kristallen. II. Z. Phys. **131**, 156—169 (1952).

Der Peierlssche Ansatz (siehe vorsteh. Ref.) berücksichtigt zwar die Periodizität des Gitters, vernachlässigt aber die Kräfte zwischen den Atomen längs der Gleitrichtung

so gleichmäßig, daß die Versetzung keine stabile Gleichgewichtslage besitzt, also durch eine beliebig kleine Schubspannung bewegt werden kann. F. R. N. Nabarro [Proc. Phys. Soc. **59**, 256—264 (1947)] hat bereits die Kräfte in der Weise ermittelt, daß er an Stelle der Integralfunktion die Summenfunktion für die Energie benutzt und die alte Peierlssche Lösung einsetzt. Die so erhaltene Bewegungsschubspannung (Bewegungs-Elastizitätsgrenze) ergibt sich aber um einige Größenordnungen zu hoch. In der vorliegenden Mitteilung wird der atomaren Struktur schon im Ausgangsansatz Rechnung getragen, wobei durch eine Ausdehnungsfunktion der Kräfte die endliche Ausdehnung der Atome mit berücksichtigt wird. Für die Bewegungs-Elastizitätsgrenze ergeben sich so Werte der Größe $10^{-4} \times$ Schubmodul, die als vernünftig anzusehen sind. Die Struktur der Versetzungen ändert sich durch diese Modifikation des Peierlsschen Ansatzes praktisch nicht. *A. Kochendörfer.*

Fukuda, Yoshiichi: On the lattice vibrations and the specific heat of a binary alloy with face-centered cubic lattice. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. **36**, 272—277 (1952).

● **Hume-Rothery, William:** Atomic theory for students of metallurgy. — 2nd ed. (Institute of Metals Monograph and Report Series No. 3.) London: The Institute of Metals 1952. VIII, 331 S. £ 1.1.0.

Diese ist die zweite, auf den Stand von Anfang 1952 gebrachte Auflage des zuerst 1946 erschienenen Buches. Es ist als eine für Metallkundler geeignete Einführung in die Elektronentheorie der Metalle gedacht. — Das erste Drittel des Buches bespricht in didaktisch sehr geschickter Weise die Grundideen der Wellenmechanik und unsere heutigen Vorstellungen vom Aufbau der Materie. Es werden hier u. a. auch μ - und π -Mesonen berührt, was wegen des raschen Anwachsens unserer Kenntnis über die Elementarteilchen allerdings zur Folge hat, daß eine Reihe von Angaben (z. B. über den Spin der Mesonen) nicht mehr dem heutigen Stand des Wissens entsprechen. — Der Hauptteil des Buches enthält eine Darstellung der Theorie der chemischen Bindung und der Elektronentheorie der Metalle. In der neuen Auflage sind hier besonders ausführlich und unter Berücksichtigung zahlreicher neuerer Originalarbeiten die mehrwertigen Metalle und die Übergangsmetalle besprochen worden. Dem Charakter des Buches entsprechend werden nur sehr geringe mathematische Anforderungen gestellt, doch werden gerade die wichtigsten Formeln der Elektronentheorie, die man für Überschlagsrechnungen dauernd braucht, gebracht. Das Buch wird sich somit sicher nicht nur die Wertschätzung des Lernenden, sondern auch diejenige des Lehrers und Forschers erwerben. Vom Standpunkt des Letztgenannten aus muß man sagen, daß etwas weitergehende Angaben über experimentelle Daten bei den theoretisch noch nicht so sehr gut fundierten Gebieten, wie z. B. beim Magnetismus, den Wert des Buches weiter gesteigert hätte. Es wäre dadurch sicher mancher Leser zu einer Beschäftigung mit diesen Fragen angeregt worden. — Diese Auflage wird der Hume-Rotheryschen, auch in schwierigsten Punkten sehr sorgfältigen, Darstellungskunst neue Freunde erwerben. Kleine Inkorrektheiten, wie etwa auf S. 266, wo die hexagonale dichteste Kugelpackung als einfaches Translationsgitter bezeichnet wird, werden sich in einer späteren Auflage leicht beseitigen lassen.

A. Seeger.

● **Shoenberg, D.:** Superconductivity. — 2nd. ed. London: Cambridge University Press 1952. 256 p. 30 s. net.

Lidiard, A. B.: Spin degeneracy and the theory of collective electron ferromagnetism. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 885—893 (1952).

Verf. behandelt das Modell eines Ferromagnetikums, in welchem die Valenzelektronen zwei verschiedene Gruppen (*A* und *B*) von Ortsfunktionen (des Bloch-schen Typs) besetzen können und die Austauschintegrale zwischen zwei Elektronen nur davon abhängen, welcher Gruppe (*A* oder *B*) diese Elektronen entstammen; es gibt also nur drei Austauschintegrale, K_{AA} , K_{BB} , K_{AB} . Unter diesen Annahmen läßt sich die Matrix der Austauschenergie diagonalisieren; man kann die Zustandssumme genähert auswerten und die freie Energie dieses Elektronensystems angeben. Diese stellt die Grundlage dar für eine spätere Verallgemeinerung der Stonerschen Theorie des Ferromagnetismus auf ein Ferromagnetikum, dessen Valenzelektronen zwei verschiedenen Energiebändern (etwa 3 *d* und 4 *s*) angehören.

G. Heber.